

الدكتور خالد حربى
أسس الرياضيات الحديثة
فى الحضارة الإسلامية

اسس الرياضيات الحديثة
في الحضارة الاسلامية

تأليف الدكتور

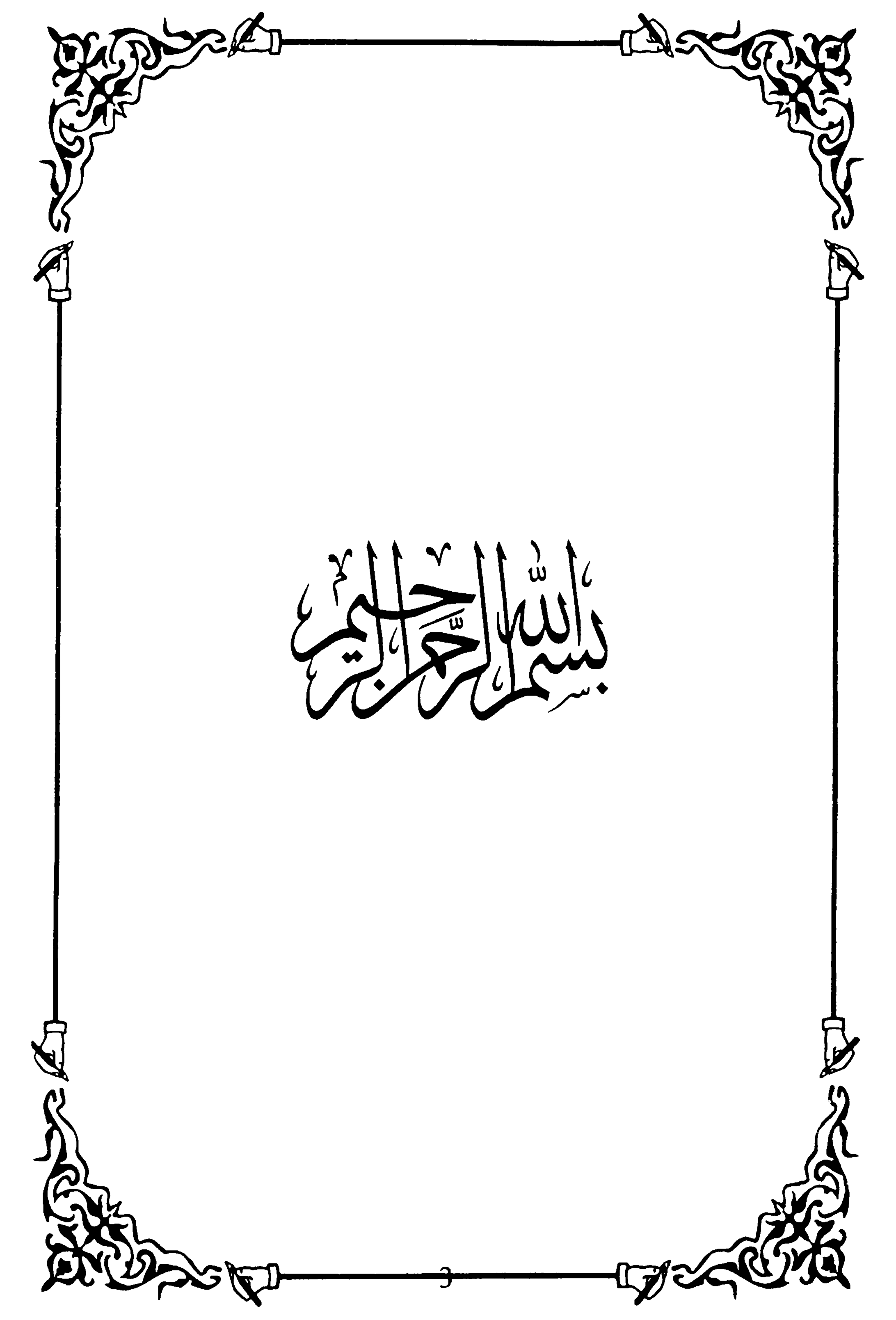
خالد أحمد حسنين علي حربي

جامعة الإسكندرية

2014



دار الكتب والوثائق القومية	
عنوان المصنف	أسس الرياضيات الحديثة في الحضارة الإسلامية.
اسم المؤلف	خالد أحمد حسنين حربي.
اسم الناشر	المكتب الجامعي الحديث.
رقم الايداع	2012/16182
الترقيم الدولي	978-977-438-309-0.
تاريخ الطبعة	الأولى يوليو 2013.


بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمة

الحمد لله الذى علم الإنسان ما لم يعلم، والصلاة والسلام على مُعلم البشرية سبل الخير، وعلى آله وصحبه والتابعين إلى يوم الدين، وبعد :

فتُعد الرياضيات من أهم العلوم التى راجت وتطورت فى الحضارة الإسلامية إبان عصور ازدهارها، فلقد اهتم علماء الرياضيات فى الحضارة الإسلامية اهتماماً بالغاً بالرياضيات بمختلف فروعها: الحساب، والجبر، واللوغاريتمات، والهندسة، وحساب المثلثات، والتفاضل والتكامل.

وقد بدأت إرهاصات نهضة المسلمين الرياضياتية بإطلاع العلماء على تراث الأمم الأخرى، وخاصة الهنود واليونان، وتناولوه بالدرس والتمحيص والنقد، الأمر الذى انتقل بهم إلى مرحلة الإبداع، فابتكروا واكتشفوا واخترعوا من الانجازات الرياضياتية التى أفادت الإنسانية جمعاء، وذلك باعتراف الغربيين أنفسهم، فإن العقل ليدهش – على حد قول كاجورى – عندما يرى ما عمله العرب والمسلمون فى الجبر، وما المكتشفات اليوم – بحسب نيكلسون – لتحسب شيئاً مذكوراً إزاء ما نحن مدينون به للرواد العرب والمسلمين الذين كانوا مشعلاً وضاء فى القرون الوسطى المظلمة ولا سيما فى أوربا، الأمر الذى جعل مؤرخ العلم الشهير جورج سارتون يقرر أن العرب والمسلمين كانوا أعظم معلمين فى العالم، وأنهم زادوا على العلوم التى أخذوها، ولم يكتفوا بذلك، بل أوصلوها درجة جديرة بالاعتبار من حيث النمو والارتقاء.

ومن العلوم التى نمت فى الحضارة الإسلامية وارتقت، الرياضيات تلك التى تقدمت فى الحضارة الإسلامية تقدماً ملحوظاً عما كانت عليه قبل

الإسلام، ويرجع ذلك إلى ما قدمه علماء الرياضيات من إنجازات علمية ظل تأثيرها ممتداً منذ عصر الحضارة الإسلامية وحتى العصر الحديث.

عرف العالم إنجازات علماء الرياضيات فى الحضارة الإسلامية من خلال مؤلفاتهم التى انتقلت إلى الغرب عبر حركة الترجمة من العربية إلى اللغات الغربية والتى بدأت منذ القرن العاشر الميلادى، واستمرت حوالى قرنين من الزمان نُقل خلالهما أمهات مؤلفات الرياضيات وغيرها من العلوم الإسلامية إلى اللغات الغربية السائدة عصرئذ وهى اللاتينية والقشتالية والعبرية، فعرف الغرب ووقف على إنجازات علماء الرياضيات فى الحضارة الإسلامية من أمثال: الخوارزمى وثابت بن قرة، وأبى كامل المصرى، والكرخى، والكوهى، وعمر الخيام، ونصير الدين الطوسى، وابن البنّاء المراكشى، والكاشى، والقلصادى، وغيرهم، ولكن المؤسف أن كثيراً من الغربيين قد أخذوا من إنجازات علماء الرياضيات المسلمين ونسبوها إلى أنفسهم، وظلت كتب تاريخ العلوم تتناقل أسماءهم على أنهم هم أصحاب الكشوف العلمية الرياضياتية التى اكتشفها العلماء المسلمون، ومن ذلك أن العالم المسلم أبا بكر محمد بن الحاسب الكرخى قد اكتشف فى القرن الرابع الهجرى / العاشر الميلادى ووضع أسس نظرية ذات الأسين (ذات الحدين) لأسس صحيحة موجبة، ورتب معاملات مفكوك $(س + 1)^{ن}$، فجاء مثلثه لمعاملات نظرية ذات الحدين، ذلك المثلث المشهور الذى أخذه بسكال الفرنسى (ت 1662) وادعاه لنفسه حتى اشتهر المثلث فى تاريخ الرياضيات بمثلث بسكال وليس مثلث الكرخى!.

كذلك أبدع عمر الخيام لأول مرة فى تاريخ الرياضيات فكرة التصنيف، فعُد بذلك أول من مهد الطريق أمام تدشين "الهندسة التحليلية" حينما

قام بتصنيف المعادلات بحسب درجتها، وبحسب الحدود التى فيها محصورة فى أربعة عشر نوعاً، وبرهن هندسياً على حل كل معادلة منها باستخدام القطوع المخروطية الثلاث: الدائرة، والقطع المكافئ، والقطع الزائد؛ فجاء فى القرن السابع عشر الميلادى سيمون الهولندى (ت 1620) وتتبع تصنيف الخيام، وأدخل عليه بعض التعديلات الطفيفة، فنسب إليه علماء الغرب "فكرة التصنيف" وتناسوا مبتكرها الحقيقى عمر الخيام!، تماماً كما تناسوا طريقته الهندسية فى حل جميع معادلات الدرجة الثالثة، تلك الطريقة التى تبدو بنصها الحرفى فى كتاب "الجومطرى" لديكارت (ت 1650). وأبدع الخيام الفروض الثلاثة فى برهانه على المصادرة الخامسة لإقليدس، تلك الفروض التى لعبت دوراً مهماً فى تدشين الهندسات اللاإقليديسية الحديثة، الأمر الذى جعل أحد علماء الرياضيات الغربيين وهو ساكيرى (ت 1733) ينتحلها فى نظريته عن الخطوط المستقيمة وينسبها له مؤرخوا الرياضيات الغربيون.

وإذا كان نصير الدين الطوسى قد استطاع أن يبرهن على أن مجموع زوايا أى مثلث تساوى قائمتين، وذلك يكافئ المصادرة الخامسة من مصادرات إقليدس، فإن الطوسى قد وضع بذلك أساس الهندسة اللاإقليدسية الحديثة والتى تقترن بأسماء غربية مثل فاوس الألمانى (ت 1855)، وبولياى المجرى (ت 1856) وغيرهما. وإذا كان كتاب "أشكال القطاعات" لنصير الدين الطوسى يُعد أول كتاب من نوعه على مستوى العالم يفصل علم المثلثات عن علم الفلك، واعتُمد مرجعا رئيساً لكل علماء الغرب الباحثين فى علم المثلثات الكروية والمستوية، فإن بعضهم انتحل كثيراً من نظرياته ونسبها لنفسه، فالناظر فى كتاب ريجيومونتانوس "علم حساب المثلثات" يدرك لأول وهلة أن كثيراً من نظرياته وأفكاره موجودة بنصها فى كتاب نصير الدين الطوسى

"أشكال القطاعات"!

وفى النصف الأخير من القرن التاسع عشر الميلادى ترجم اريستيدمار كتاب تلخيص أعمال الحساب لابن البنّاء المراكشى إلى اللغة الفرنسية، وبعد أن درسه دراسة وافية، قرر أن كثيراً من النظريات الرياضياتية المنسوبة لعلماء غربيين هى نظريات ابن البنّاء المراكشى. وإذا كان مؤرخوا الرياضيات الغربيون ينسبون نظرية "ذات الحدين" لإسحاق نيوتن أو لغيره من علماء العرب، فإن منهم من يعترف بأن صاحبها هو العالم الرياضياتى المسلم غيات الدين الكاشى، بحسب تقرير دريك ستروبك. كما يعترف فرانسيس كاجورى وهو أحد أشهر مؤرخى الرياضيات الغربيين بأن أبا الحسن القلصادى قد استخرج قيمة تقريبية للجذر التربيعى للكمية ($أ^2$ + ب)، وهذه القيمة أخذها علماء الرياضيات الغربيين وخاصة ليوناردو أف بيزا الإيطالى ومواطنه تارتاليا وغيرهما واستعملوها فى إيجاد القيم التقريبية للجذور الصم .... إلى غير ذلك من الإنجازات والإبتكارات الرياضياتية التى أبدعها علماء الرياضيات فى الحضارة الإسلامية، ونسبت فى تاريخ العلم إلى أسماء غربية، الأمر الذى يحول دون وقوفنا على الحجم الحقيقى لإسهام علماء الرياضيات المسلمين فى الحضارة الإنسانية.

لكنى طالما ناديت بأن التمحيص والدراسة فى المخطوطات العربية الإسلامية، ومحاولة فهمها وتحقيقها ليوضح بصورة جلية أن مخطوطات حضارتنا الإسلامية مازالت تحوى كنوزاً وذخائراً لم يكشف عنها بصورة لائقة حتى اليوم! ومن بين هذه الكنوز وتلك الذخائر إنجازات علماء الرياضيات المسلمين المدوّنة فى مخطوطاتهم، وبالمخطوطات وحدها نثبت

أسبقية علماء الحضارة الإسلامية على علماء الغرب فيما يختص بنسبة الإكتشافات والابتكارات الرياضياتية الإسلامية إلى الآخرين، فبين الحين والآخر نطالع مخطوطاً عربياً رياضياتياً وقد حُقق ونشر، وأثبت فيه محققه أسبقية صاحب المخطوط عن نظيره الغربى الذى أخذ كشفه أو ابتكاره ونسبه إلى نفسه. وهذه الطريق وأعنى بها تحقيق نشر المخطوطات الرياضياتية الإسلامية، هى - كما ذكرت - من أحسن السبل لرد الفضل لأهله وتصحيح مسار تاريخ العلم العالمى.

وفى هذه السبيل تبحث هذه الدراسة، متساءلة عن الحجم الحقيقى لإسهام علماء الرياضيات المسلمين فى الحضارة الإنسانية.

الله أسأل أن ينتفع بعلمى هذا فهو تعالى من وراء القصد

وعليه التكلان وإليه المرجع والمآب.

خالد أحمد حربى

الإسكندرية فى

رمضان 1433هـ/ أغسطس 2012

مدخل تمهيدى

تطور الرياضيات حتى الحضارة الإسلامية

بدأت رياضيات ما قبل التاريخ بدايات بديهية من خلال وجود جماعات عددية سواء فى الإنسان مثل عدد الأصابع وعدد الأرجل، أو الحيوان، أو الأشياء، واستعان إنسان العصور القديمة بالحصى لعد الأشياء، ومنها جاءت لفظة "إحصاء"، وبنمو الإنسان وتزايد عدده وموارده كان عليه أن يعدد حاجاته وأقاربه وقبيلته، وما إلى ذلك. ثم ظهرت عمليات الجمع والطرح والقسمة والضرب والأوزان والمقاييس بصورة اضطرارية لاحتياج الإنسان إلى عمليات كثيرة ظهرت له مثل البيع والشراء والمقايضة.

وفى الحضارة المصرية القديمة ارتبطت الرياضيات بالناحية العملية، الأمر الذى جعل المصريون يرتقون بها ويطورونها. وقد ظهر هذا الارتقاء الرياضياتى المصرى فى بناء الأهرامات التى بلغت من الدقة ما جعلها أحد عجائب الدنيا السبع حتى الآن. فلقد عرفت مصر القديمة الرياضيات والحساب أكثر من سواها، وذلك لارتباط هذه العمليات بالبناء الهندسى للمعابد والأهرام والمقابر الفرعونية الكبرى. ففى سنة 2950 ق.م بنى المهندس المصرى امحوتب هرم سقارة المدرج مستخدماً نظريات رياضياتية وعمليات حسابية وهندسية فى غاية الدقة. وبعد ما يقرب من مائة سنة بنى خوفو الهرم الأكبر بحيث تتجه زواياه إلى الجهات الأربع الأصلية اتجاهاً صحيحاً، وجاءت أضلع مثلثات القاعدة فى غاية الدقة بحيث لا يتعدى الخطأ فيها نسبة واحد على أربعة آلاف. وبذلك يتضح الشوط الكبير الذى قطعه المصريون القدماء فى تطور الرياضيات وتقدمها، فسجلوا فى تاريخ هذا العلم معلومات مهمة فى الحساب والهندسة والمتواليات الهندسية والحسابية. وقد عثر على كل هذه العمليات الرياضياتية فى بردية الكاتب المصرى أحمس التى يرجع تاريخها إلى خمسة آلاف سنة تقريباً.

ومما يشير إلى التقدم الرياضياتى الذى بلغه المصريون القدماء أن فيثاغورث اليونانى قد صاغ نظريته المعروفة باسمه والقائلة بإن المربع المنشأ على الوتر فى المثلث القائم الزاوية يساوى مجموع المربعين المنشأين على الضلعين الآخرين. وقد جاءت هذه النظرية بعد زيارة فيثاغورث لمصر ونقله معرفة المصريين بمعادلة الدرجة الثانية بصورتها:

$$س^2 + ص^2 = 100، ص = \frac{3}{4} س ، إذن س = 8، ص = 6.$$

وترتبط هذه المعادلة ارتباطاً وثيقاً بالحل الهندسى للعلاقة بين الأعداد 3، 4، 5 فى مثلث قائم الزاوية. ومن هنا صاغ فيثاغورث نظريته السالفة.

وفى بلاد الرافدين تطالعنا صحف سنكرة المعاصرة لبردية أحمس أن البابليين اخترعوا الأحرف الهجائية، ودوّنوا الأرقام والأعداد بها طبقاً للترتيب الأبجدى، ومرتبة آحاد وعشرات ومئات، ووضعوا جداول للمربعات والمكعبات. وحسب البابليون والسومريون مساحة المستطيل وشبه المنحرف والمثلث القائم، ووقفوا على تشكل ستة مثلثات متساوية الأضلاع فى الدائرة، ومقدار كل زاوية فى كل مثلث تساوى ستين درجة. وينقسم محيط الدائرة إلى ستة أقواس يساوى نصف قطر الدائرة وتر كل منها.

وعرف البابليون والسومريون المعادلات من الدرجة الأولى التى لها مجهول واحد، والمعادلات من الدرجة الثانية التى يأتى حلها من معادلتين آنيتين أحدهما على الأقل من الدرجة الثانية، أو كلاهما من نفس الدرجة.

واستعمل الساميون الأرقام الحرّفية، فدوّنوا الأرقام باستعمال حروف الهجاء العربية بحيث يدل على كل حرف برقم معين، فيرمز حرف الألف إلى الواحد (1)، ويرمز حرف الباء إلى الاثنين (2)، ويرمز حرف الجيم إلى

الثلاثة (3)، ويرمز حرف الياء إلى العشرة (10) .. وهكذا الآحاد والعشرات والمئات والألوف وعشرات الألوف ومئات الألوف كما يلي:

الآحاد

أ	ب	ج	د	هـ	و	ز	ح	ط
1	2	3	4	5	6	7	8	9

العشرات

ى	ك	ل	م	ن	س	ع	ف	ص
10	20	30	40	50	60	70	80	90

المئات

ق	ر	ش	ت	ث	خ	ذ	ض	ظ
100	200	300	400	500	600	700	800	900

الألوف

غ	بغ	جغ	دغ	هـ غ	وغ	زغ	حغ	طغ
1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000

عشرات الألوف

يغ	كغ	لغ	مغ	نغ	سغ	عغ	فغ	صغ
10000	20000	30000	40000	50000	60000	70000	80000	90000

مئات الألوف

قغ	رغ	شغ	تغ	ثغ	خغ	نغ	ضغ	ظغ
100000	200000	300000	400000	500000	600000	700000	800000	900000

وراعى العرب فى تركيب الجمل تقديم الحرف ذو العدد الأكبر، يليه الأصغر فالأصغر كما فى الأمثلة التالية:

كى = 20 + 10 = 30 لأن ك = 20 ، ى = 10.

شرق = 300 + 200 + 100 = 600 لأن ش = 300 ، ر = 200 ، ق = 100.

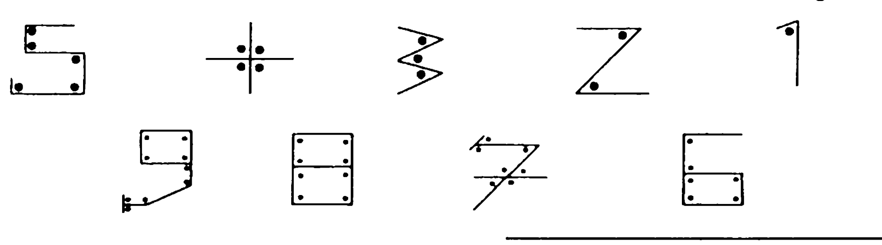
لغـــغ = 30000 + 1000 = 31000، لأن لـــغ = 30000 ، غ = 1000.

وهكذا ... ظل العرب يستعملون طريقة حساب الجمل هذه حتى مجئ الإسلام واستعملها الكتّاب والعلماء فى زمن الرسول (صلى الله عليه وسلم) وبعده وحتى بعد ظهور الأرقام العربية، يشير إلى ذلك استعمال العماء طريقة حساب الجمل فى مؤلفاتهم بعد القرن الأول الهجرى وحتى القرن الرابع الهجرى، ومنهم البيرونى فى كتابه القانون المسعودى.

أما بلاد اليونان فقد عرفت بدورها العلوم الرياضياتية وطورتها بعد أن اقتبست عن المصريين والسومريين والبابليين، ولما نقل العرب والمسلمون تراث الأمم الأخرى وخاصة اليونان، لم تستطع الرياضيات اليونانية أن تروى ظمأهم، فالعقلية اليونانية إنما قامت على فلسفة نظرية ورياضية واستدلالية. فقد شغف اليونان بالرياضيات النظرية المجردة، واهتموا كثيراً بالخيال الرياضى إشباعاً لنهمهم العقلى. وهذا ما دعاهم إلى وضع كتب فى الهندسة لا نظير لها عند الأمم الأخرى، مثل مؤلفات أقليدس، وأبولونيوس. أما العرب فقد اجتذبتهم االناحية العملية من الرياضيات فضلاً عن تعلقهم بالجانب النظرى فيها. فهم لم يكتفوا باستيعاب الهندسة الإغريقية، ولكنهم قد اهتموا

أيضاً بتطبيقها عملياً. وقد نجحوا فى ذلك أيما نجاح. وهنا تكمن عبقرية العرب المسلمين وأثرها العظيم فى تقدم العلم عامة، والرياضيات خاصة، والجبر بصورة أخص[1] كما سيأتى.

إن الأعداد التى استخدمها اليونان والرومان وغيرهما هى الأعداد اليونانية وصورتها: IV, V, VI, I, II, III وهذه الرموز يمكن استخدامها فى عملية الجمع، بينما يكون من الصعب جداً بل من المستحيل استخدامها فى عمليات الضرب والقسمة، أو حتى جمع أعداد بالألوف أو الملايين، وعندما تسربت علوم الهند إلى العرب فى قمة معرفتهم بهذه العلوم خلال فترة نقل كتاب السندهند إلى اللغة العربية فى عهد الخليفة المنصور، تعرف العرب على أنظمة الهنود فى مجال الريضايات، واطلعوا على الأعداد الهندية، ثم هذبوها وكونوا منها سلسلة عُرفت بالأرقام الهندية وصورتها: ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩ وتستعمل هذه السلسلة فى الهند، وفى البلاد العربية المشرقية. وابتكر العرب سلسلة الأرقام الغبارية[2] المرتبة على أساس الزوايا، فرقم ١ له زاوية واحدة، ورقم ٢ له زاويتان، ورقم ٣ له ثلاث زوايا، ورقم ٤ له أربع زوايا ... وهكذا إلى رقم ٩، فكان صورة هذه السلسلة هكذا:



(1) محمد عبد الرحمن مرحبا، الموجز فى تاريخ العلوم عند العرب، ط بيروت، ١٩٧٠، ص ص ١٢١- ١٢٢.

(2) سميت بالغبارية لأن العرب كانوا يبسطون الغبار (التراب) على لوح من الخشب ثم يرسمون عليه هذه الأعداد .

واستمر العرب فى تهذيب هذه الأرقام وتطوير رسمها حتى اتخـذت شكلها الحالى:

1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 ، 9 وعُرفت باسم الأرقام العربيـة وساد استعمالها فى بلاد المغرب العربى.

•

ومن الواضح أن سلسلة الأعداد الهندية، والأعداد الغباريـة العربيـة تقف عند الرقم (9). وقد تفتقت العقلية الإسلامية الابتكارية عن إضافة الصفر فى العمليات الحسابية فى السلسلتين، فرمزوا للصفر فى سلسلة الأرقام الهندية بشكل النقطة (.) ورمزوا له فى سلسلة الأرقام الغبارية العربية بشكل دائـرة فارغة (0). وإبان اتصال الغرب بالعلوم العربية الإسلامية ابتداءً من الأندلس، وجد الغربيون أن سلسلة الأرقام الغبارية العربية المستعملة فى المغرب أنسب لهم فى الاستعمال من الأرقام الرومانية، ومازال العالم يستعمل هذه الأرقـام باسم الأرقام العربية.

هناك رأى يذهب إلى أن الهنود هم الذين ابتكروا الصفر، إلا أن هـذا الرأى يفتقد إلى الأدلة الدامغة، ويقابله الرأى المؤيد بأن العرب هم فى الفتـرة الواقعة بين منتصف القرن الثالث الميلادى والقرن السادس المسلادى، أى قبل بعثة الرسول (صلى الله عليه وسلم)، وذلك فى أول عهـدهم بـتعلم الكتابـة العربية، وفى هذه الفترة أيضاً حوّل العرب صورة الخط النبطى البحته وهـى نفس صورة الأرقام الغبارية إلى صورته الحالية، فاستخدم العرب الصفر فى صورة نقطة، ولا يخفى ما للنقطة من أهمية فى الكتابة العربيـة مـن حيـث التمييز والضبط بين الحروف، ومن هنا أعطوها نفس الأهمية مـع الأعـداد لتعبر عن الصفر. ومما يؤيد ابتكار العرب للصفر واستخدامه فى كتاباتهم ما

عُثر عليه حديثاً من نقش مؤرخ بسنة 328م اكتشفه العالم الأثـــرى الفرنـــسى رينيه دوسو (ت 1958) برأس شمرا جنوب سوريا، يحتَــوى علـــى الخــط النبطى مقروناً بالنقطة التى تُعبر عن الصفر.

باب فى

طبقات علماء الرياضيات
فى الحضارة الإسلامية

الفصل الأول

الخوارزمى

أبو عبدالله محمد بن موسى (182- 232هـ/ 798- 846م)، والخوارزمى نسبة إلى خوارزم من أعمال روسيا حالياً، والتى ولد بها، ونشأ الخوارزمى فى إقليم "خوارزم"، وكان هذا الإقليم من أعظم مراكز الثقافة الإسلامية، حيث كانت خوارزم سوقاً للحركة العلمية، وفيها نشأ كثير من العلماء الذين اتصلوا ببيت الحكمة المأمونى ببغداد، وقد توافرت للخوارزمى كل الأسباب التى جعلته ينال حظاً وافراً من العلوم الرياضياتية والفلكية.

يُعد الخوارزمى أول من كتب فى علم الجبر والمقابلة بحسب ابن خلدون الذى يصنفه ضمن فروع الحساب. ومع أن الخوارزمى قد اشتهر بأعماله الرياضية أكثر من الفلكية، إلا أننا نجد بعض كتب التراجم تذكر شهرته الفلكية فقط. فابن النديم[1] يروى أنه كان منقطعاً إلى خزانة الحكمة للمأمون، وهو من أصحاب علوم الهيئة، وكان الناس قبل الرصد وبعده يعولون على زيجيه الأول والثانى، ويعرفان بالسندهند. وله من الكتب: كتاب الزيج نسختين أولى وثانية، كتاب الرخامة، كتاب العمل بالإسطرلاب، كتاب عمل الإسطرلاب، كتاب التاريخ.

أما القفطى[2] فنراه – كعادته – ينقل من الفهرست نقلاً حرفياً؛ ولم يزد على كلام ابن النديم سوى، كتاب الجبر والمقابلة للخوارزمى، والذى لم يذكره ابن النديم، فضلاً عن عدم ذكره لكتبه فى الحساب.

أما المسعودى[3] فيصنف الخوارزمى ضمن المؤرخين الذين ألفوا كتباً

---

(1) الفهرست، طبعة القاهرة القديمة 1948، ص383.

(2) إخبار العلماء بأخبار الحكماء، طبعة القاهرة 1326هـ، ص187- 188.

(3) مروج الذهب ومعادن الجوهر، دار الأندلس، ط الأولى، بيروت 1965، جـ1، ص21.

فى التاريخ والأخبار ممن سلف وخلف.

واللافت للنظر فى كلام ابن النديم، والقفطى، والمسعودى، أنـــه لـــم يشتمل على أية كتب فى الجبر والحساب، مع أن شـــهرته الرياضـــية فاقـــت شهرته الفلكية التى تحدث عنها صاحب الفهرست، وصاحب الأخبار، وشهرته التاريخية التى قال بها صاحب المروج. ومثل هذا الأمر يجعلنا نتوخى التدقيق والتمحيص فى تعاملنا مع كتب التراجم التراثية.

وإذ انتقلنا إلى المؤرخين المحدثين، وجدنا كارل بروكلمان يـــذكر أن أقدم مؤلف له بأيدينا كتاب فى علم الرياضيات هو أبو عبدالله محمد بن موسى الخوارزمى الذى عمل فى "بيت الحكمة" فى عهد الخليفة المأمون، وتوفى بعد سنة 232هـــ حسبما ذكر نيلينو. وقد ألف للمأمون موجزاً فـــى علـــم الفلـــك الهندى يعرف بالسندهند، وتصحيحاً للوحات بطليموس، ولكن لم يكتسب شهرة كبيرة إلا بكتابه فى "الجبر" الذى ابتكر تسميته بذلك، وكتابه فى الحساب، وقد ترجما إلى اللاتينية فى زمن مبكر، وظلا فى أوربا أساساً لعلم الحساب حتـــى عصر النهضة[1].

المهم أن الخوارزمى بعد أن حصّل قدراً كبيراً من علـــوم الرياضـــة والفلك فى "خوارزم"، فكر فى الانتقال إلى بغداد عاصمة الدولـــة والخلافـــة، وفيها يقيم الخليفة، وهى مطمع أنظار العلماءالنابهين، وليس بعيداً أن يكـــون المأمون، وهو الشغوف بحب العلماء قد عرف الكثير عن عبقرية الخوارزمى، فبعث إليه يستقدمه إلى بغداد، ولم يجد الخوارزمى صعوبة فى الاتصال بهـــذا

---

(1) كارل بروكلمان، تاريخ الأدب العربى الترجمة العربية، الهيئة المصرية العامة للكتاب، 1990، 2/ 558- 559.

الخليفة المحب للعلم، فولاه منصباً كبيراً فى بيت الحكمة، ثم أوفده فى بعض البعثات العلمية إلى البلاد المجاورة ومنها بلاد الأفغان، وكان الهدف من هذه البعثات هو القيام بالتحقيقات العلمية والبحث والدرس، والاتصال بعلماء تلك البلاد وزيارة مكتباتها والحصول على أنفس الكتب والمخطوطات[1]. ولعل ذلك الاهتمام العلمى هو ما قد ميز العصر الذهبى للإسلام حيث اختص بكثير من الخلفاء والأمراء الذين شجعوا الحركة العلمية وهيأوا الجو المناسب لازدهار العلم وإبداع العلماء فأنشأوا المدارس والمكتبات ودور العلم، وجدوا واجتهدوا فى البحث عن الكتب القديمة القيمة والمخطوطات، فحصلوا عليها وتنافسوا فى تقدير العلم واجتذاب العلماء. وكان العلماء على مستوى الأمة الاسلامية يتمتعون بالحصانة والحرية ولا يتأثرون بالخلافات السياسية أو الطائفية، ويعتبر الشعور بالأمان والاستقرار الذى أحسه العالم فى مزاولة عمله من أهم مظاهر الحركة العلمية فى عصر الإسلام الذهبى. وقد أدت تلك العوامل مجتمعه إلى وجود البيئة العلمية الصالحة لنشأة العلم وتطوره[2].

وقد ذكرت معظم كتب التراجم، وكذلك كل الذين كتبوا عن الخوارزمى من شرقيين وغربيين أنه كان منقطعاً إلى بيت الحكمة المأمونى منذ قدومه بغداد، ممارساً للنشاط العلمى بكل مظاهره، حتى ولاه المأمون رئاسة البيت، وفيه وضع معظم مؤلفاته.

---

(1) محمد عاطف البرقوقى، وآخرون، الخوارزمى العالم الرياضى الفلكى، الدار القومية للطباعة والنشر، بدون تاريخ، ص98.

(2) أحمد فؤاد باشا، التراث العلمى للحضارة الإسلامية ومكانته فى تاريخ العلم والحضارة، دار المعارف، القاهرة 1993، ط الأولى، ص34.

وإذا كانت شهرة الخوارزمى ترجع إلى ابتكاره علم الجبر، إلا أنه أجاد فى علوم الفلك والتاريخ والجغرافيا، ويتضح ذلك من الوقوف على مؤلفاته، ومنها: رسالة برهان نظرية فيثاغورث، رسالة العمليات الحسابية الأربع على الكميات الصم، رسالة جمع المقادير الجبرية وطرحها وضربها وقسمتها، رسالة النسبة التقريبية وقيمتها الرياضياتية، رسالة الوحدة المستعملة فى المساحات والحجوم، كتاب التاريخ، كتاب الجبر والمقابلة، كتاب الجمع والتفريق، كتاب رسم الربع المعمور، كتاب زيج الخوارزمى الأول، كتاب زيج الخوارزمى الثانى، كتاب جداول للنجوم وحركتها، كتاب صورة الأرض وجغرافيتها، كتاب صورة الأرض فى المدن والجبال والجزر والأنهار، كتاب صنع الاسطرلاب، كتاب طريقة معرفة الوقت بواسطة الشمس، كتاب المعاملات، كتاب هيئة الأرض، كتاب الوصايا.

ويُعزى إلى المسلمين الفضل فى اختراع علم الجبر والذى ارتبط باسم العالم الشهير الخوارزمى. إذن لم يكن علم الجبر معروفاً بالصورة التى نعرفها الآن عند الأمم السابقة، وبذلك يبطل الزعم بأن اليونانيين قد قدموا تحليلاً دقيقاً لعلم الجبر استناداً إلى كتاب "صناعة الجبر" لذيوفنطس (ديافانتوس) الذى يقول عنه القفطى[1]: "اليونانى الإسكندرانى فاضل كامل مشهور فى وقته وتصنيفه، وهو صناعة الجبر كتاب مشهور مذكور خرج إلى العربية، وعليه عمل أهل هذه الصناعة. وإذا تبحره الناظر رأى بحراً فى هذا النوع"، ويحتوى هذا الكتاب على ثلاث عشرة مقالة، ولم يصل إلينا منه إلا المقالات الست الأولى، وما جاء فى هذه المقالات، وما كتب لها من شروح

---

(1) الأخبار، ص126.

وتعليقات فيما بعد لا يضع أمامنا صورة كاملة أو مخططاً كاملاً لعلم الجبر.

ويُعد الخوارزمى كذلك أول من طوّر فن الحساب، وجعل منه فناً صالحاً للاستعمال اليومى، ومفيداً لبقية العلوم، بعد أن وسع فيه ونظمه تنظيماً دقيقاً[1] ويعد الخوارزمى بحق مثالاً رائداً فى الرياضيات وفى الجبر بصفة خاصة، فهو أول ممن أطلق مصطلح الجبر الذى أخذ عنه الأوربيون الكلمة الإنجليزية Algebra . ولقد ظل الخوارزمى موضع اهتمام الأوربيين، بل واعتمدوا عليه فى كثير من أبحاثهم ونظرياتهم، بحيث يمكن القول بإن الخوارزمى وضع علم الجبر وعلم الحساب للناس أجمعين[2] على ما سنرى فى الفقرات التالية.

صيغت كلمة "الجبر" لأول مرة فى التاريخ لعلم لم تتأكد استقلاليته بالاسم الذى خصّ به فقط، بل ترسخ كذلك مع تصور لمفردات نقدية مُعدة للدلالة على الأشياء والعمليات، ففى أيام الخليفة المأمون فى الثلث الأول من القرن الثالث الهجرى / التاسع الميلادى، بزغ علم جديد فى الرياضيات وكانت الولادة حقيقية، كتاباً واسماً خاصين. فقد كتب أبو جعفر محمد بن موسى الخوارزمى مؤلفه الشهير "الكتاب المختصر فى الجبر والمقابلة"[3].

---

(1) زيجرد هونكه، شمس تسطع على الغرب، ترجمة فاروق بيضون، كمال دسوقى، مراجعة فاروق عيسى الخورى، بيروت، ط الثانية 1969، ص158.

(2) ماهر عبد القادر محمد، التراث والحضارة الإسلامية، دار المعرفة الجامعية، الإسكندرية 1989، ص80.

(3) رشدى راشد، تاريخ الرياضيات العربية، مركز دراسات الوحدة العربية، بيروت 1989، ص20.

يُعرف علم الجبر بأنه: إضافة شيء إلى كمية معلومة أو ضربه بهـا حتى يصير أحدهما مساوياً للآخر، ومن هذا التعريف يتضح أن القصد منه هو العمليتان الجبريتان التاليتان:

م + س = ب

م س = ب

وانتشر تطبيق هاتين العمليتين فصارتا تعنيان موضوع الجبر كله وهو ذلك الفرع من التحليل الرياضى الذى يناقش الكميات باستخدام حروف ورموز عامة، ويعرف الجبر بالقاموس الرياضياتى بأنه تعميم لعلم الحساب، أى أن الحقائق الحسابية مثل 3 + 3 + 3 = 3 × 3 ، 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 5 × 4 .... الخ، وكلها حالات خاصة من الحالات العامة الجبرية مثل س + س + س + س = 4 س حيث س هى أى عدد.

ويبتدئ الخوارزمى كتابه الجبر والمقابلة ببيان الغاية والهدف من علم الجبر، ومدى نفعه للناس فيما يحتاجون إليه من الحساب، فيقول: "إنى لما نظرت فيما يحتاج إلليه الناس من الحساب وجدت جميع ذلك عدداً، ووجدت جميع الأعداد إنما تركبت من الواحد، والواحد داخل فى جميع الأعداد. ووجدت جميع ما يلفظ به من الأعداد ما جاوز الواحد إلى العشرة يخرج مخرج الواحد ثم تثنى العشرة وتثلث كما فعل الواحد فيكون منها العشرون والثلاثون إلى تمام المائة. ثم تثنى المائة وتثلث كما فعل بالواحد وبالعشرة إلى الألف، ثم كذلك تردد الألف عند كل عقد إلى غاية المدرك من العدد[1].

---

(1) الخوارزمى، كتاب الجبر والمقابلة، تحقيق على مصطفى مشرفة، ومحمد مرسى أحمد، ملحق بكتاب ماهر عبد القادر محمد، التراث والحضارة الإسلامية، م. س، ص228.

ويقرر الخوارزمى فى كتابه قاعدة هامة من قواعد البحث العلمى، وهى قاعدة اتصال العلماء على مر العصور "فلم يزل العلماء فى الأزمنة الخالية والأمم الماضية يكتبون الكتب مما يصنفون من صنوف العلم ووجوه الحكمة نظراً لمن بعدهم واحتساباً للأجر بقدر الطاقة"[1].

ويصنف الخوارزمى العلماء والباحثين – كلٌ فى تخصصه – إلى ثلاثة أصناف لا يخرج أى باحث علمى عن أحدهم، وهم "إما رجل سبق إلى ما لم يكن مستخرجاً قبله فورثة من بعده. وإما رجل شرح مما أبقى الأولون ما كان مستغلقاً فأوضح طريقه وسهل مسلكه وقرب مأخذه. وإما رجل وجد فى بعض الكتب خللاً فلمَّ شعثه وأقام أوده وأحسن الظن بصاحبه غير راد عليه ولا مفتخر بذلك من فعل نفسه[2].

وبهذا يكون الخوارزمى – من خلال مقدمته الموجزة لكتاب الجبر والمقابلة – قد وضع فلسفة التأليف العلمى فى عصره بكل جلاء ووضوح، وبين ملامح الشخصية العلمية فى عصر النهضة الإسلامية متمثلة فى التحلى بأنبل الصفات وضرب المثل الأعلى فى حب العلم والمثابرة على البحث العلمى والترفع عن بعض الصغائر، والاجتهاد فى كشف أسرار العلم والتمسك بالأمانة العلمية عند النقد أو النقل[3].

وهذه القواعد التى وضعها الخوارزمى إنما تنفى ما يتسرب إلى بعض الأذهان من أن العرب كانوا يكشفون من أسرار العلم بقدر ما تدعو إليه

---

(1) الخوارزمى، كتاب الجبر والمقابلة، ص227.

(2) الخوارزمى، نفس المصدر، نفس الصفحة.

(3) أحمد فؤاد باشا، مرجع سابق، ص55.

حاجتهم فى حياتهم المعيشية، والحقيقة أن المسلمين كانوا يشتغلون إلى جانب ذلك بالبحث العميق وتحقيق قضايا العلم، بدافع الحب الحقيقى للعلم ذاته، ويكفى دليلاً على ذلك أنهم ترجموا كتباً للفلسفة اليونانية وغيرها من مراجع العلم الأجنبى، وراجعوا هذه الترجمات عدة مرات بقصد التثبت من أنها صورة دقيقة لما فى مراجعها الأصلية، ثم قيامهم بتصحيح كثير من الآراء اليونانية وغيرها، ثم ابتكارهم كثيراً من الآراء والنظريات العلمية الجديدة التى لم تكن معروفة من قبل، فلقد جمع المسلمون إذن بين البحث العلمى لترفيه حياتهم والارتفاع بمستواها، وبين كشف حقائق الوجود، ومعرفة أسرار الطبيعة(1). ويعتبر الخوارزمى بمؤلفاته – خاصة كتاب الجبر والمقابلة – من أوضح الأمثلة على ذلك.

لكن ما الدافع وراء ابتكار الخوارزمى لعلم الجبر؟ الواقع أن الذى دفع الخوارزمى إلى ذلك هو علم الميراث المعروف بعلم الفرائض، فأراد أن يبتدع طرقاً جبرية تسهل هذا العلم الشائك. وبذلك يكون الخوارزمى قد انطلق من شريعته الإسلامية واتخذها حافزاً له – وهى هكذا دائماً – فى تأليف "الكتاب المختصر فى حساب الجبر والمقابلة". فأدخل الممارسات الحسابية للفقهاء فيما أسسه كنظرية وهو مجال الحسابات على المجاهيل، فكثير من المسائل يتطلب حلها التعامل مع الكميات المجهولة جنباً إلى جنب مع الكميات المعلومة.

ولقد أوضح الخوارزمى فى كتابه هذا أكثر المسائل المتعلقة بالجبر الحديث من معادلات وجذور وكسور .. إلخ، بل وشرح ما يسمى بلغة الرياضيات الحديثة الجذر الذى يحتوى على كمية تخيلية (مستحيلة) مثل

---

(1) راجع البرقوقى، وآخرون، الخوارزمى .. ص104.

10 ، ويمكن الإشارة إلى ذلك فيما يلى:

قسّم الخوارزمى الأعداد التى يحتاج إليها فى حساب الجبر والمقابلة إلى ثلاثة ضروب: وهى جذور وأموال وعدد مفرد لا ينسب إلى جذور ولا إلى مال[1].

والجذر يعنى "س"، والمال يعنى "$س^2$"، والمفرد يعنى الحد الخالى من س. يقول الخوارزمى: "واعلم أنك إذا نصفت الأجذار فى هذا الباب وضربتها فى مثلها فكان مبلغ ذلك أقل من الدراهم التى مع المال"، فالمسألة مستحيلة[2]. فهذا النص يشير إلى أن الخوارزمى قد تنبه إلى الحالة التى يكون فيها الجذر كمية تخيلية بلغة الرياضيات الحديثة، فأشار إلى الحالة التى يستحيل فيها إيجاد قيمة حقيقية للمجهول، فقال: فى هذه الحالة تكون المسألة مستحيلة، أو تخيلية.

فمن الأبواب التى يحتويها كتاب الجبر والمقابلة، باب الضرب والذى يبين فيه كيفية ضرب الأعداد والأشياء والجذور بعضها فى بعض. يقول الخوارزمى: اعلم أنه لابد لكل عدد يضرب فى عدد من أن يضاعف أحد العددين بقدر ما فى الآخر من الآحاد ..." [3]. وفيه باب الجمع والنقصان والقسمة، يعرض للعمليات الخاصة وقسمة المقادير الجبرية وطرحها وقسمتها. "اعلم أن جذر مائتين إلا عشرة مجموع إلى عشرين إلا جذر مائتين فإنه عشرة سوياً. وجذر مائتين إلا عشرة منقوص من عشرين إلا جذر مائتين فهو

---

(1) الخوارزمى، كتاب الجبر والمقابلة، ص ص228- 229.

(2) الخوارزمى، كتاب الجبر والمقابلة، ص233.

(3) الخوارزمى، كتاب الجبر والمقابلة، ملحق بكتاب الموجز فى تاريخ العلوم عند العرب للدكتور مرحبا، ص270.

ثلاثون إلا جذرى مائتين .. وإن أردت أن تقسم جذر تسعة على جذر أربعة، فإنك تقسم تسعة على أربعة فيكون اثنين وربعاً، فجذرها هو ما يصيب الواحد، وهو واحد ونصف"[1].

ثم باب المسائل (المعادلات) الست، ثم باب المسائل المختلفة، وهى تدور حول تكوين معادلات من الدرجة الثانية وكيفية حلها. وهذه المسائل قريبة الشبه جداً بما فى كتب الجبر الحديثة. أما المعادلات التى قسمها الخوارزمى إلى ستة ضروب أو أقسام، فيمكن الإشارة إليها فيما يلى[2]:

1- الأموال التى تعدل الجذور، ومثالها القول: مال يعدل خمسة أجذاره فجذر المال خمسة، والمال خمسة وعشرون، وهو مثل خمسة أجذاره.
2- الأموال التى تعدل العدد، ومثالها القول: مال يعدل تسعة فهو المال وجذره ثلاثة. وكالقول: خمسة أموال تعدل ثمانين فالمال الواحد خُمس الثمانين وهو ستة عشر.
3- الجذور التى تعدل عدداً، ومثالها القول: جذر يعدل ثلاثة من العدد، فالجذر ثلاثة والمال الذى يكون منه تسعة.
4- الأموال والجذور التى تعدل عدداً، ومثالها القول: مال وعشرة أجذار يعدل تسعة وثلاثين درهماً، ومعناه أى مال إذا زادت عليه مثل عشرة أجذار بلغ ذلك كله تسعة وثلاثين.
5- الأموال والعدد التى تعدل جذوراً، ومثالها القول: مال وأحد وعشرون

---

(1) الخوارزمى، نفس المصدر، ص ص270- 272.
(2) الخوارزمى، كتاب الجبر والمقابلة، ص ص229- 233.

من العدد يعدل عشرة أجذاره، ومعناه أى مال إذا زدت عليه واحداً وعشرين درهماً، كان ما اجتمع مثل عشرة أجذار ذلك العدد.

6- الجذور والعدد التى تعدل الأموال، ومثالها القول: ثلاثة أجذار وأربعة من العدد تعدل مالاً.

وأورد الخوارزمى مسائلة الست كما يلى:

م1 : $س^2 + 10س = 39$

م2 : $2س^2 + 10س = 48$ تؤول إلى $س^2 + 5س = 24$

م3 : $\frac{1}{2}س^2 + 5س = 28$ تؤول إلى $س^2 + 10س = 56$

م4 : $س^2 + 21 = 10س$

م5 : $س^2 = 3س + 4$

م6 : يضرب لها أمثلة عدة، ومنها:

$س^2 = 5س$ تؤول إلى $س = 5$، $س^2 = 25$

$\frac{1}{2}س = 10$ تؤول إلى $س = 20$، $س^2 = 400$

$\frac{1}{3}س^2 = 4س$ تؤول إلى $س^2 = 12س$، $س = 12$، $س^2 = 144$

$س^2 = 9$ تؤول إلى $س = 3$

$5س^2 = 80$ تؤول إلى $س^2 = 16$

وهذه الضروب الستة من المعادلات يعبر عنها باللغة الجبرية الحديثة كما يلى :

م س^2 = ب س

م س^2 = جـ

ب س = جـ

م س^2 + ب س = جـ

م س^2 + جـ = ب س

ب س + جـ = م س^2

ثم قدم الخوارزمى حلاً لكل ضرب من هذه الضروب الستة بذكر أمثلة توضيحية مفصلة خالية من استعمال الرموز، الأمر الذى تطلب منه جهداً كبيراً فى حل مثل هذه المسائل الجبرية. يقول الخوارزمى: "مالان وعشرة أجذار تعدل ثمانية وأربعين درهماً"[1]. وهو يقدم طريقة الحل على هذا النحو: "ومعناه، أى مالين إذ جمعا زد عليهما مثل عشرة أجذار أحدهما، بلغ ذلك ثمانية وأربعين درهماً. فينبغى أن ترد المالين إلى مال واحد، وقد علمت أن مالاً من مالين نصفهما، فاردد كل شىء فى المسألة إلى نصفه، فكأنه قال: مال وخمسة أجذار يعدل أربعة وعشرين درهماً، ومعناه، أى مال إذا زدت عليه خمسة أجذاره، بلغ ذلك أربعة وعشرين. فنصّف الأجذار فتكون اثنين ونصفاً، فاضربهما فى مثلها فتكون ستة وربعاً، فزدها على الأربعة والعشرين، فتكون ثلاثين درهماً وربعاً، فخذ جذرها وهو خمسة ونصف فانقص منها نصف الأجذار، وهو اثنان ونصف، يبقى ثلاثة، وهو جذر المال، والمال تسعة.

---

(1) الخوارزمى، كتاب الجبر والمقابلة، ص231.

توضح هذه المسألة ما كان يعانيه الخوارزمى وغيره من علماء العرب والمسلمين فى حل المعادلات الجبرية، ويتضح هنا أيضاً أهمية التعبير بالرموز فى تبسيط العمليات الجبرية والرياضياتية وتسهيلها بصفة عامة، ويتضح ذلك من حل مثال الخوارزمى السابق بالرموز فيما يلى:

$$2\text{ س} + 10\text{ س} = 48$$

أى أن $\text{س}^2 + 5\text{ س} = 48$

$$\square\text{ س} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 24} - \frac{5}{2} = \frac{11}{2} - \frac{5}{2} = 3$$

وهذا هو جذر المال والذى هو $\text{س}^2 = 9$.

قدم الخوارزمى (خوارزمية) لحل مسائل جبرية، ومحاولته هى الأولى المكرسة للحساب الجبرى بإيراد كل معادلة إلى شكلها المنتظم المتكافئ، فيقصد الخوارزمى بفكرة الجبر نظرية المعادلات الخطية والتربيعية ذات المجهول الواحد، وحساب أولى على ثنائيات الحد، وثلاثيات الحدود المترافقة معها، ويجب أن يكون الحل عاماً وقابلاً للحساب(1).

ثم يذكر الخوارزمى بعد ذلك باب المعاملات، فيقول: واعلم أن معاملات الناس كلها من البيع والشراء والصرف والإجارة وغير ذلك على وجهين بأربعة أعداد تلفظ بها المسائل، وهى: المسعر، والسعر، والثمن، والمثمن. ويشرح معانى هذه الكلمات شرحاً وافياً، ثم يعرض بعد ذلك مسائل مما يجرى فى حياة الناس من بيع وإيجارات، وما يتعاملون به من صرف، وكيل، ووزن، والغاية من ذلك واضحة، وهى تعليم الناس كيف يتصرفون

---

(1) راجع، رشدى راشدى، تاريخ الرياضيات العربية، ص28، 29.

تصرفاً عادلاً فى قضاء حاجاتهم التى تتعلق بهذه النواحى، وكيف يعاملون بعضهم بعضاً معاملة قائمة على التقدير السليم والوزن الدقيق.

وبالإضافة إلى ما سبق فقد أوجد الخوارزمى الأحجام لبعض الأجسام الهندسية البسيطة كالهرم الثلاثى، والهرم الرباعي والمخروط. وكان حل المعادلات التكعيبية بواسطة مقطوع المخروط من أعظم الأمور التى أتى بها، وعملت على تطور علم الجبر الذى وضعه.

والخوارزمى أيضاً هو أول من وضع كتاباً فى الحساب، وهو الأول من نوعه من حيث الترتيب والتبويب والمادة. وقد ترجمه إلى اللاتينية أو لاردبات، وبقى زمناً طويلاً مرجع العلماء، وبقى عدة قرون معروفاً باسم "الغوريتمى" نسبة إلى الخوارزمى.

تلك كانت أهم إنجازات الخوارزمى الرياضياتية، وخاصة فى علم الجبر الذى يُعد هو مبتكره الأول، وللوقوف على أهمية هذه الإنجازات، علينا أن نتتبع تأثيرها فى الرياضيين اللاحقين لصاحبها، وأثرها فى الغرب بصفة خاصة، وفى تاريخ علم الرياضيات بصفة عامة، ويمكن البحث فى هذا الموضوع فى الفقرات التالية:

مع أن الظاهر على علماء الرياضيات فى عصر الخوارزمى أن كلاً منهم قد مارس العلم بصورة فردية، إلا أن المعرفة العلمية للعصر كله تعتبر محصلة نهائية للعمل الجماعى. وكان للخوارزمى فيها النصيب الأكبر، ولمعرفة أبعاد الإنجاز الذى تم فى ذلك العصر، علينا أن نتتبع التطور العلمى للرياضيات، وخاصة علم الحساب والجبر. ومما لاشك فيه أن معرفتنا بهذه الأبعاد سوف تؤدى بالضرورة إلى معرفة الإضافات التى أضافها كل عالم بعد

الخوارزمى، ومدى اسهامها فى المنظومة الجماعية لتطور الرياضيات فى عصر الخوارزمى.

إن لكتاب الجبر والمقابلة للخوارزمى شأناً كبيراً، إذأن كل ما ألفه العلماء فيما بعد كان مبنياً عليه، فقد بقى عدة قرون مصدراً اعتمد عليه العلماء فى بحوثهم الرياضياتية.

ويعتبر سنان بن الفتح الحرّانى الحاسب الذى ظهر فى أوائل القرن الثالث الهجرى أول من تأثر بالخوارزمى، حيث كان معاصراً له، درس كتابه الجبر والمقابلة ووعاه جيداً. وما أن اكتمل نضجه العلمى حتى شرح هذا الكتاب وسمى عمله العلمى هذا، كتاب "شرح الجبر والمقابلة" للخوارزمى. وقد صار بذلك مقدماً فى صناعة الحساب والأعداد. وقدم من الكتب غير الشرح السابق: كتاب "التخت فى الحساب الهندى"، كتاب "الجمع والتفريق، كتاب "شرح الجمع والتفريق"، كتاب "الوصايا"، كتاب "حساب المكعبات"[1].

ويصرح ابن الفتح بفضل الخوارزمى عليه فى كتابه "الكعب والمال والأعداد المتناسبة"، حيث قال فى بدايته: إن جل معرفة الحساب هو النسبة والتعديل. وقد وضع محمد بن موسى الخوارزمى كتاباً سماه "الجبر والمقابلة" وقد فسر ذلك، وسمح لنا بعد تفسيره بابا نتشعب على قياسه، يقال له: باب الكعب، ومال المال، والمداد، ولم نر أحداً من أهل العلم مما سبقنا وانتهى إلينا خبره، وضع فى ذلك عملاً أكثر من التسمية، فأحببنا أن نضع فى ذلك كتاباً نبين فيه مذهب قياسه.

---

(1) ابن النديم، الفهرست، ص392.

وإذا كان ابن الفتح قد عاصر الخوارزمى واستفاد من أعماله وأعلن أنها قد فتحت له أبواباً جديدة فى البحث الرياضى، فإن ثابتاً بن قرة (221-228هـ / 835- 900م) قد التقى بالخوارزمى، وقرأ وتعلم عليه فى داره ثم أوصله الخوارزمى بالخليفة المعتضد وأدخله فى جملة المنجمين.

إذن كانت هناك صلات علمية بين ابن قرة والخوارزمى، فالأول تعلم على الثانى، وذلك إنما يكشف لنا عن طبيعة النشاط العلمى الجماعى الذى مارسه الخوارزمى. ويتضح أثر الأستاذ فى التلميذ من أن الأخير "قد وضع كتاباً فى الجبر بيّن فيه علاقة الجبر بالهندسة، وكيفية الجمع بينهما.

إذن تأثر ثابت بالعصر الذى عاش فيه واتصل ببعض معاصريه من العلماء الرياضيين، ودرس ما عندهم. كما قرأ لمن لم يعاصره من العلماء السابقين، يشهد بذلك ما قدمه من إسهامات رياضياتية تعتبر تكملة لأعمال من سبقه من العلماء، وخاصة الخوارزمى. وقد مثلت إضافات ذات تطوراً هاماً لعلم الجبر، إذ أنه "كان أول من أدرك انطباقه على الهندسة.

وفى نفس عصر الخوارزمى (القرن الثالث الهجرى) نبغ عالم رياضى آخر تتلمذ على كتب الخوارزمى، وكان يفتخر بذلك، وهو أبو كامل شجاع بن أسلم المصرى من أهالى مصر، نبغ فى الجبر وحاز شهرة عظيمة فيه إلى الدرجة التى لقب معها بأستاذ الجبر.

يذكر ابن النديم[1] أن أبا كامل من علماء القرن الثالث الهجرى، ومن أهالى مصر، كان فاضلاً وحاسباً وعالماً. وكان أبو كامل من العلماء الذين

---

(1) الفهرست، ص374.

يفخرون بتعلمهم العلوم على علماء العرب والمسلمين، فكان فخوراً بأنه تتلمذ على كتب علامة الإسلام فى الجبر محمد بن موسى الخوارزمى.

يكشف كلام ابن النديم هذا عن بنية العلاقة العلمية التى تمت بين الخوارزمى، وأبى كامل المصرى، من خلال تعلم الثانى على كتب الأول، والتى يبدو أنه أتقنها حتى صار فخوراً بتعلمه عليها.

ويعترف أبو كامل المصرى نفسه بفضل الخوارزمى عليه، فيذكر فى مقدمة كتابه الذى أسماه أيضاً "الجبر والمقابلة" أن كتاب محمد بن موسى الخوارزمى المعروف بكتاب الجبر والمقابلة أصح الكتب الرياضياتية أصلاً، وأصدقها قياساً، وكان مما يجب علينا من التقدمة، الإقرار له بالمعرفة والفضل، إذ كان السابق إلى كتاب الجبر والمقابلة والمبتدئ له والمخترع لما فيه من الأصول التى فتح الله لنا بها ما كان مستغلقاً .. وترك (مؤلفها) شرحها وإيضاحها، ففرعت منها مسائل كثيرة يخرج أكثرها إلى غير الضروب الستة التى ذكرها الخوارزمى فى كتابه، فدعانى إلى كشف ذلك وتبيينه، فألفت كتاب الجبر والمقابلة وبينت شرحه فى كتاب الارثماطيقى فى الأعداد والجبر والمقابلة[1].

ويذكر بروكلمان معتمداً على الفهرست أن عبد الحميد بن واسع بن ترك أبو الفضل الخُتَّلى الحاسب، له كتاب الجبر والمقابلة، مع أن ابن النديم ذكر للخُتَّلى فقط، كتاب المعاملات، وكتاب الجامع فى الحساب يحتوى على ستة كتب[2].

---

(1) الفهرست، ص391.

(2) بروكلمان 2/ 366.

لكن يبدو أن الكتاب الذى ذكره بروكلمان يقع ضمن كتاب الخُتّلى الذى يحتوى على ستة كتب، حيث ذكر بروكلمان أن لكتاب الجبر والمقابلة للخُتّلى مختصراً فى جار الله تحت رقم 1505/ 2[1].

ويمتد تأثير الخوارزمى فيما تلا عصره من عصور، ففى القرن الخامس الهجرى نرى الكرخى (ت 421هـ / 1030م) يتبع الطريقة التحليلية لعلم الجبر والمقابلة مقتدياً بسلفيه الخوارزمى، وأبى كامل ... ويعتبر كتابه "الفخرى فى الحساب" أحسن كتاب فى الجبر فى العصور الإسلامية (الوسطى)، مستنداً على كتاب محمد بن موسى الخوارزمى (الجبر والمقابلة) .. وكان الكرخى من علماء المسلمين المبتكرين الذين يكرهون النقل والترجمة، ويفضل التصنيف والتحليل والتعليق على مؤلفات غيره. وقد شرح الكثير من النقط الغامضة فى "كتاب الجبر والمقابلة" للخوارزمى. وهنا يتضح التواصل العلمى بأجلى صوره، فمن الخوارزمى إلى أبى كامل المصرى، ومن الاثنين إلى الكرخى، تشكل أعمالهم الثلاثة منظومة علمية تدل على تطور الرياضيات عند علماء المسلمين فى فترة هامة من فترات تاريخ العلم.

لكن هل توقف تأثير الخوارزمى عند علماء الرياضيات المسلمين فى العصور المختلفة، أم كان له دور فى تطور الرياضيات عند الأوربيين إبان نهضتهم المعروفة؟

الواقع أن أعمال الخوارزمى الرياضياتية، خاصة كتاب الجبر والمقابلة، كان لها شأن كبير ليس فقط على مستوى تاريخ العلم العربى الإسلامى، بل وعلى مستوى تارايخ العلم العالمى. فلقد كان هذا الكتاب بمثابة

---

(1) بروكلمان 2/ 367.

الينبوع الذى استقى منه علماء أوربا. يذكر "كريستوفر" فى كتابه "التقليد الإسلامى" أن الخوارزمى الذى عمل فى بيت الحكمة فى بغداد كتب كتاباً مهماً ومؤثراً فى علم الجبر، وأنه هو الذى أطلق على الزاوية مصطلح "الجيب" الذى ترجم إلى اللاتينية بالمصطلح "Simus"[1].

ويذكر أصحاب "تاريخ كمبردج للإسلام" أن الخوارزمى هو الذى اخترع كلمة "اللوغاريتم" وهو المسئول بصورة أساسية عن تأسيس علم الجبر الإسلامى[2]. وقد جاءت معرفة أوربا لكتاب الجبر والمقابلة عن طريق الترجمات اللاتينية التى وضعت له. فلقد ترجم جيرارد الكريمونى الأصل العربى لكتاب الجبر والمقابلة إلى اللغة اللاتينية فى القرن الثانى عشر للميلاد. وعرفت أوربا هذه الترجمة باسم: Lulus algebrae et almucqraba le que.

وقد ترجم الكتاب أيضاً روبرت الشسترى Robert of Chester سنة 1145م. وصارت هذه الترجمة أساساً لدراسات كبار علماء الرياضيات الأوربيين. مثل ليونارد فيبوناتسى Leonardo Fibonacci البيزى (ت بعد 1240م). وقد اعترف هذا العالم الرياضياتى بأنه مدين للمسلمين بالكثير حيث رحل إلى مصر وسوريا واليونان وصقلية، وتعلم هناك القواعد العربية فوجدها أدق وأسمى من قواعد فيثاغورث، ثم عمد إلى تأليف كتاب الحساب Liber abaci فى خمسة عشر فصلاً، منها بحث فى الحساب الجبرى. وقد

---

(1) Christopher, J. B., The Islamic Tradition, Harper & Row, Publishers, New York, 1972, P. 23- 24.

(2) Holt, P. M & Ann, K.S.L and Lewis; Bernard: The Cambridge History of Islamic Society and Civilization, Vol 28. Cambridge University, Press 1970, P. 748.

أورد البيزى الحالات الست لمعادلات الدرجة الثانية كما عرضها الخوارزمى[1]. وهناك ماستر جاكوب Master Jacob من أهل فلورنسا الذى ألَفَ فى الحساب والجبر كتاباً تاريخه سنه 1307م يجمع كأحد كتب ليوناردو ستة أنواع من المعادلات الرباعية التى كان الخوارزمى قد أوردها فى كتاب الجبر والمقابلة، والذى عرفت أوربا بواسطته مبادئ علم الجبر، ومعها لفظة "الجبر" نفسها. وإلى مصنفات الخوارزمى أيضاً يرجع الفضل فى نقل الأرقام الهندية – العربية إلى الغرب حيث سميت باسمه أول الأمر algorisms (الغوريتمى).

ثم جعل الألمان من الخوارزمى اسماً يسهل عليهم نطقه، فأسموه Algorizmus ، ونظموا الأشعار باللاتينية تعليقاً على نظرياته. ومازالت القاعدة الحسابية (Algrithmus) حتى اليوم تحمل اسمه كرائد لها.

وقد نشر "فردريك روزن" كتاب الجبر والمقابلة سنة 1831م فى لندن، ونشر كارنبسكى ترجمة أخرى مأخوذة من ترجمة الشسترى سنة 1915.

من هنا يتضح أن أعمال الخوارزمى فى علم الرياضيات قد لعبت فى الماضى والحاضر دوراً مهماً فى تقدمه، لأنها أحد المصادر الرئيسة التى انتقل خلالها الجبر والأعداد العربية إلى أوربا .. فعلم الجبر من أعظم ما اخترعه العقل البشرى من علوم، لما فيه من دقة وأحكام قياسية عامة .. فالخوارزمى هو الذى وضع قواعده الأساسية وأصوله كما نعرفها اليوم.

---

(1) كارادى فو، الفلك والرياضيات، بحث ضمن تراث الإسلام، تأليف جمهرة من المستشرقين، تعريب وتعليق جرجيس فتح الله، ط الثانية، بيروت 1972، ص573-574.

من كل ما سبق نستطيع الزعم بأن الخوارزمى قد أسس مدرسة رياضياتية لعبت دوراً مهماً فى تطور الرياضيات منذ أن بدأ صاحبها هذا التطور، وذلك عندما انتقل من الحساب إلى الجبر، والذى اعترف العالم بأنه واضعه الحقيقى. وعن طريق الخوارزمى تم الانتقال أيضاً من القيمة العددية البحتة للأعداد إلى علاقتها بعضها ببعض. وقد مثل هذا التطور الذى أحدثه الخوارزمى مقدمة معرفية لكل من جاء بعده من علماء الرياضيات إن على المستوى العربى، أو على المستوى العالمى، الأمر الذى يجعلنا نقرر أن كل علماء الرياضيات اللاحقين للخوارزمى، وقد أسسوا أبحاثهم بناءً على أعماله، إنما يعتبرون تلاميذ فى مدرسته الرياضياتية الممتدة من القرن الثالث الهجرى، وحتى العصر الحديث.

الفصل الثانى

ثابت بن قرة

ثابت بن قرة (221- 288هـ / 835- 900م) هو أبو الحسن ثابت بن قرة بن ثابت ... الحرانى الصابئ، كان صيرفيا بحران، استصحبه محمد بن موسى بن شاكر لما انصرف من بلد الروم لأنه رآه فصيحاً، فتعلم فى داره، ثم أوصله بالمعتضد، وأدخله فى جملة المنجمين. وكان ثابت حكيماً فى أجزاء علوم الحكمة، ولم يكن فى زمانه من يماثله فى صناعة الطب ولا فى غيره من جميع أجزاء الفلسفة، فكان له براعة فى المنطق والتنجيم والهيئة والحساب والهندسة. وذكر ابن جلجل أن له كتباً كثيرة فى هذه الفنون، ومنها كتاب مدخل إلى كتاب أقليدس عجيب، وهو - أى ثابت - من المتقدمين فى علمه جداً. ويؤيد ذلك ما ذكره الشهرزورى من أنه جرى عند ثابت ذكر فيثاغورث وأصحابه، وتعظيم العدد الذى لا يُفهم معناه، فقال: إن الرجل وشيعته أجل قدراً وأعظم شأناً من أن يقع لهم سهو أو خطأ فى معرفة الأمور العقلية، فيجوز أن يكونوا قد وقفوا من طبيعة العدد على أسرار لم تنته إلينا لانقراضها.

وخلاصة القول فى ثابت أنه قد بلغ فى تحصيل العلوم شأناً عظيماً إلى الدرجة التى معها نال تبجيل وتوقير المعتضد له. وليس أدل على ذلك من أنه طاف معه فى بستان ويد الخليفة على يد ثابت، فانتزع يده بغتة من يد ثابت، ففزع الأخير، فقال الخليفة: يا ثابت أخطأت حين وضعت يدى على يدك وسهوت، فإن العلم يعلو ولا يُعلى عليه. وكان ثابت يجلس بحضرته ويجادله طويلاً ويقبل عليه دون وزرائه وخاصته.

وكان ثابت بن قرة من مشاهير نقلة العلوم فى الإسلام فكان جيد النقل إلى العربية حسن العبارة قوى المعرفة باللغة السريانية وغيرها ويشهد على

ذلك كثرة مصنفاته التى ورد ذكر أسمائها فى معظم كتب التراث التى أرخت له. فذكر له ابن جُلجل كتاباً واحدا هو "مدخل إلى كتاب إقليدس"، وذكر له ابن النديم أربعة شعر كتاباً ورسالة وعدد له القفطى مائة وخمسة عشر كتاباً ورسالة. بينما انفرد ابن أبى أصبعة بإيراد ثبت مطول لأعمال ثابت بن قرة يشتمل على مائة وسبعة وأربعين مصنفا وهذه المصنفات تشتمل على مؤلفاته الشخصية، وما قام بنقله من اليونانية والسريانية، وذلك فى فنون شتى مثل الطب والرياضيات والفلسفة والفلك.

ويعد ثابت بن قرة تبعا للكرادى فو – أعظم هندسى عربى على الإطلاق[1] وهو الذى ترجم الكتب السبعة من أجزاء المخروطات فى كتب أبللوليوس الثمانية إلى العربية فحفظ لنا بذلك ثلاثة كتب من مخروطات أبللونيوس فقدت أصولها اليونانية وساعده بنوموسى فى ذلك، فقدموه إلى الخليفة المعتضد، فأكرم وفادته ... وكتب ثابت عدد من الرسائل فى الفلك والهندسة مبسطاً فيها ما غمض من الفكر والعبارات فى كتب الأقدمين مستنبطاً مسائل جديدة، فى الهندسة وعلم الحيل، وفى الجذور الصم التى بحثها على نمط إقليدس وأفلاطون.

فثابت بن قرة يُعد من أوائل علماء الحضارة الإسلامية الذين تصدوا للبرهنة على المصادرة الخامسة لإقليدس الخاصة بالخطوط المتوازية، بعد أن فشل علماء اليونان فى البرهنة عليها. ومما لاشك فيه أن هذه المصادرة تلعب دوراً مهماً فى علم الهندسة، وليس أدل على ذلك من أنها شغلت تفكير علماء الرياضيات منذ القرن الثالث قبل الميلاد وحتى القرن التاسع عشر الميلادى.

---

(1) كرادى فو، الفلك والرياضيات، م. س.، ص577.

وقد تصدى علماء الحضارة الإسلامية للبرهنة على هذه المصادرة، وبذلوا جهوداً كبيرة فى إثباتها أدت إلى ظهور الهندسات اللاإقليديسية فى العصر الحديث، تلك التى اقترنت بأسماء غربية، مع أن علماء الحضارة الإسلامية هم الرواد الأول لهذه الهندسات، ومنهم ثابت بن قرة الذى ساهم فيها ببرهانه على مصادرة إقليدس الخامسة. ففى رسالته فى برهان المصادرة المشهورة من إقليدس، أتى ثابت بن قرة بمصادرة تنص على أنه إذا وقع خط مستقيم على خطين مستقيمين، وكان هذان الخطان يتقاربان فى إحدى جهتيهما، فإنهما يتباعدان فى جهتهما الأخرى، وإن تقاربهما من جهة التقارب، وتباعدهما من جهة التباعد يزيد بينهما. ثم بدأ البرهان على مصادرة إقليدس مستخدماً خمسة أشكال هى كما يلى[1]:

الشكل الأول:

إذا وقع خط مستقيم على خطين مستقيمين وكانت الزاويتان المتبادلتان متساويتين، فإن ذلك الخطين لا يقربان ولا يبعدان فى جهة من جهتيهما.

مثل خطى أ ب، جـ د وقع عليهما خط هـ ز، فكانت زاويتا أ هـ ز، هـ ز د متساويتين. فإن أ ب ، جـ د لا يقربان ولا يبعدان لا فى جهة أ ، جـ ولا فى جهة ب ، د.

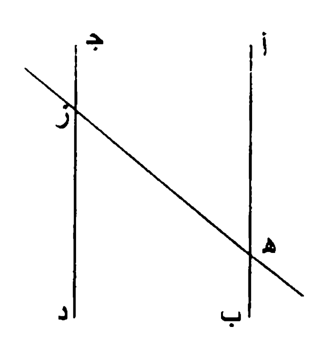
البرهان:

إذا طبقنا هـ أ على ز د بأن نضع نقطة هـ على ز ، و هـ ز على

---

(1) ثابت بن قرة، رسالة فى برهان الممصادرة المشهورة من إقليدس، تحقيق خليل جاويش، ضمن كتابه نظرية المتوازيات فى الهندسة الإسلامية، المؤسسة الوطنية للترجمة والتحقيق والدراسات، تونس 1988، ص12 وبعدها.

نفسه، وزاوية أ هــ ز على زاوية هــ ز د ، انطبق جــ ز على هــــ ب ، وزاوية جــ ز هــ ، على زاوية ز هــ ب. وكان خط ز د لخط أ هــ كذلك. فإن لم يكن كذلك كانت زاوية أعظم من المساوية لها، وذلك محال. وقد تبــين مع هذا أن خطى هــ ب، ز د إن كانا يقربان فى جهة ب، د إذا أخرجناهما، أن خطى أ هــ، جــ ز، يتقاربان أيضاً فى جهة أ، جــ مثل ذلــك التقــارب للمطابقة، لكن من المبين المسلم أنه إذا وقع خط مستقيم على خطين مستقيمين، فكان الخطان يتقاربان فى إحدى جهتيهما أنهما يبعدان فى جهتها الأخرى، وأن تقاربهما من جهة التقارب وتباعدهما من جهة التباعد يزيد بينهما.



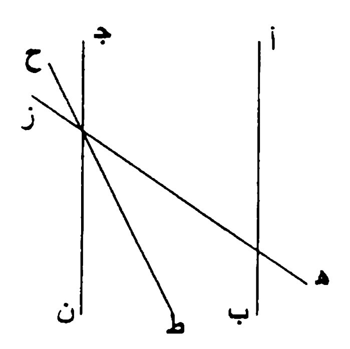
وكذلك إن وضعنا أن خطى هــ ب، ز د متقاربان فى جهــة ب، د ، وجب أن يتباعد خط أ هــ، جــ ز فى جهة أ، جــ. لكن خطا أ هــ، جــــ ز قد طابقا خطى هــ ب، ز د فى جهة ب، د. ولو كان هــ ب، ز د متقــاربين لكان أ هــ، جــ ز متباعدين، فلم يطابقاهما. فإن طابقاهما فلم يتباعدا فى جهة أ، جــ، فقد بقى إما أن يكون خطا أ هــ، جــ ز تقاربا فــى جهــة أ، جــــ كتقارب خطى هــ ب، ز د فى جهة ب، د الذى وضع، أو أن يكونا لم يتقاربا ولم يتباعدا فى جهة أ، جــ، فإن كانا تقاربا فيها بطلت المقدمة المسلمة، لأنــه يوجد خطان قد تقاربا فى الجهتين. وإن كانا حفظ البعد بينهما فليس يطابقــان

هـ ب، ز د، وقد طابقاهما. فما وُضع من أن هـ ب، ز د إذا كانت المتبادلتان اللتان هما أ هـ ز، هـ ز د متساويتين يتقاربن فى جهة ب، د محال. وكذلك يستحيل أن يبعدا فيها، فهما لا يقاربان ولا يباعدان فيها. وكذلك يتبين فى خطى أ هـ، جـ ز؛ وهو المطلوب إثباته.

الشكل الثانى:

إذا وقع خط مستقيم على خطين مستقيمين لا يقربان ولا يبعدان فى جهة من جهتيهما، فإن المتبادلتين متساويتان.

مثال ذلك: خطا أ ب، جـ د لا يقربان ولا يبعدان فى واحدة من جهتيهما، وقع عليهما هـ ز. فإن زاويتى أ هـ ز، هـ ز د المتبادلتين متساويتان.



البرهان :

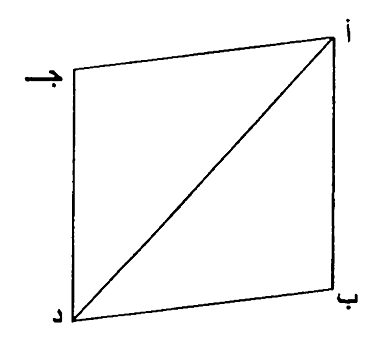
إنهما إن لم تكونا متساويتين فلتكن أ هـ ز أصغر، ولتكن زاوية هـ ز ط مثل زاوية أ هـ ز؛ ونخرج ط ز ح. فخطا ط ز ح، أ ب لا يقربان ولا يبعدان لتساوى المتبادلتين كما قدمنا، وقد كان خطا أ ب، جـ د لا يقربان ولا يبعدان. وقد قاطع جـ د خط ط ح على نقطة ز. وكل واحد منهما لا يقرب ولا يبعد من أ ب، لكن ز ط أقرب إلى هـ ب من ز د لأنه بينه وبينه، وهذا

خلف. فزاويتا أ هــ ز، هــ ز ن متساويتان؛ وهو المطلوب إثباته.

الشكل الثالث :

إذا وُصِل بين أطراف خطين مستقيمين متساويين لا يقربان ولا يبعدان بخطين مستقيمين، فإنهما أيضاً متساويان ولا يقربان ولا يبعدان.

مثال ذلك: خطا أ ب، جـ د مستقيمان متساويان لا يقربان ولا يبعدان، وقد وُصِل بين أطرافهما بخطي أ جـ، ب د. فإن أ جـ، ب د متساويان ولا يقربان ولا يبعدان.



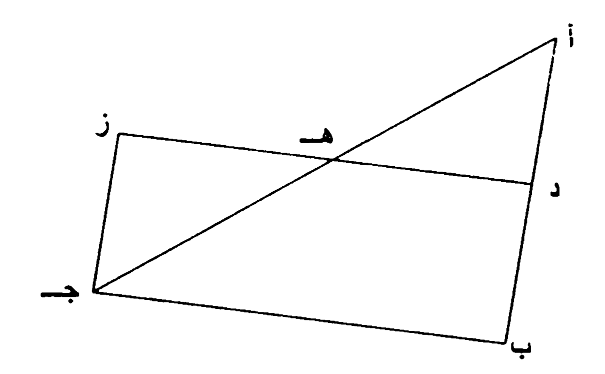
البرهان :

إن زاويتي أ د جـ، د أ ب المتبادلتين متساويتان، وخطا أ ب، أ د مساويان لخطي جـ د، د أ كل واحد لنظيره. فمثلثا أ د جـ، د أ ب متساويان، فخطا أ جـ، ب د متساويان. وزاويتا أ د ب، د أ جـ متساويتان وهما متبادلتان. فخطا أ جـ، ب د لا يقربان ولا يبعدان. فخطا أ ب، جـ د لا يقربان ولا يبعدان وهما متساويان. وكذلك أيضاً خطا أ جـ، د ب لا يقربان ولا يبعدان، وهما متساويان. وهو المطلوب إثباته.

الشكل الرابع :

كل مثلث يقسم ضلعان من أضلاعه كل واحد منهما بنصفين ويوصل بين النقطتين اللتين قسما عليهما بخط مستقيم، فإنه نصف الضلع الآخر ولا يقرب منه ولا يبعد.

مثال ذلك: مثلث أ ب جـ قسم أ ب منه بنصفين على د، أ جـ بنصفين على هـ، ووصل د هـ المستقيم؛ فإنه نصف ب جـ ولا يقرب منه ولا يبعد.



البرهان :

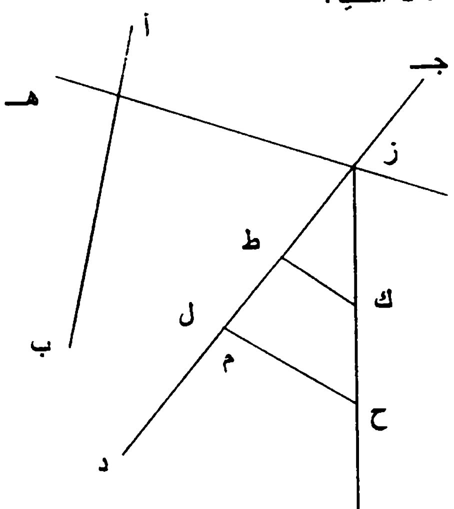
نخرج د هـ إلى ز حتى يكون هـ ز مثل د هـ، ونصل جـ ز. فيكون مثلثا أ د هـ، جـ هـ ز متساويين، وخطا أ د، جـ ز متساويين. فلذلك يكون خطا د ب، جـ ز متساويين. لكن زاويتي أ د هـ ، هـ ز جـ متساويتان وهما متبادلتان. فخطا أ ب، جـ ز لا يقربان ولا يبعدان. وكذلك خطا ب د، جـ ز أيضاً لا يقربان ولا يبعدان، وهما متساويان. وقد وصل بين أطرافهما خطا ب جـ، د ز؛ فهما متساويان ولا يقربان ولا يبعدان. لكن د ز

ضعف د هـ فـ ب جـ ضعف د هـ ولا يقرب ولا يبعد عنه، وهو المطلوب إثباته.

الشكل الخامس:

إذا وقع خط مستقيم على خطين مستقيمين فتصير الزاويتان اللتان فى جهة واحدة أقل من قائمتين، فإن الخطين إذا أُخرجا فى تلك الجهة التقيا.

مثال ذلك: خطا أ ب، جـ د وقع عليهما خط هـ ز، وكانت زاويتا ب هـ ز، د ز هـ أصغر من قائمتين. فإن خطى أ ب، جـ د إذا أُخرجا فى جهة ب ، د التقيا.



البرهان :

أن نخرج من نقطة ز خط ز ح لا يقرب ولا يبعد من خط أ ب، ونُعلم على ز د نقطة ط كيفما اتفقت، ونُخرج منها إلى ز ح خط ط ك لا يقرب ولا يبعد من هـ ز. فإن اتفق أن يكون أعظم من هـ ز، وإلا فصلنا ط ل مثل ز ط، ك ح مثل ز ك ، ووصلنا ل ، ح. تبين أن ل ح ضعف ط ك، وإنه أيضاً

من ط ك لا يقرب ولا يبعد. فلابد إذا كان ط ك أصغر من هــ ز، وأضعفناه ثم أضعفنا ضعفه، ومررنا على هذا دائماً أن ننتهى فى أضعافه إلى خط أعظم من هــ ز. فليكن ل ح، فخط ل ح أطول من هــ ز وهو لا يقرب ولا يبعد عنه. فلينفصل من ل ح مثل هــ ز وهو ح م، فيكون خطا ز هــ، ح م متساويين ولا يقربان ولا يبعدان. فالواصلان بين أطرافهما متساويان ولا يقربان ولا يبعدان كما تقدم.

لكن ز ح قد وصل بين ز و ح فــ هــ ب إذا أُخرج على استقامة من جهة ب صار إلى م، وإلا عرض إن وُصل بين هــ و م غير هــ ب، إذا أُخرج هــ ب، أن يكون الواصل بين هــ و م لا يقرب ولا يبعد عن ز ح. وقد كان هــ ب لا يقرب ولا يبعد عن ز ح، والوصل بين هــ و م يوجد بين هــ ب، ز ح، وهذا خلف. فإذن هــ ب إذا أُخرج صار إلى م، فلابد له من أن يلقى قبل نقطة م نقطة من خط جــ د، فــ أ ب، جــ د إذا أُخرجا فى جهة ب، د التقيا. وهو المطلوب إثباته.

ويرجع الفضل لثابت بن قرة فى ابتداع علم التفاضل والتكامل – مساهمة مع الكوهى وأبى الوفاء البوزجانى على ما سيأتى لاحقاً– ، وذلك باعتراف الغربيين، فثابت تبعا لديفيد سميث فى كتابه تاريخ الرياضيات قد اكتشف علم التفاضل والتكامل حينما استطاع إيجاد حجم الجسم المتولد من دوران القطع المكافئ حول محوره.

وفى كتاب كل منهما والذى يحمل نفس الاسم "تاريخ الرياضيات" أورد كل من هورد إيفز وكارل بوبر تجديد ثابت بن قرة وتطويره لنظرية فيثاغورث القائلة: "إن مربع الوتر فى المثلث قائم الزاوية يساوى مجموع

مربعي الضلعين القائمين" فبعد أن نقح ثابت برهان فيثاغورث على هذه النظرية، وأدخل عليه بعض التعديلات، استطاع أن يدشن نظرية جديدة تسمح بتعميم نظرية فيثاغورث لأى مثلث أ ب جـ مختلف الأضلاع وهى:

أ ب + أ جـ = ب ح (ب ح + ك جـ)

على شرط أن تقع نقطتى ك ، ح على الضلع ب ح، وكذلك

∡ أ جـ ب =∡ أ ك جـ =∡ أ ثم استنتج أن:

أ ب² = أ جـ² = ب جـ (ب ح + ك جـ)

وقدم ثابت البرهان على هذه النظرية عبر ثلاث حالات هى: إذا كانت ∡ أو زاوية أ قائمة، وحادة ، ومنفرجة، الأمر الذى دفع عجلة علم الهندسة دفعة ممتدة منذ عصر ثابت وحتى العصر الحديث، فما زالت هذه النظرية معمول بها فى الهندسة الحديثة.

الفصل الثالث

أبو كامل المصرى

أبو كامل
(236 - 318هـ / 850 - 930م)

شجاع بن أسلم المصرى، ولد فى مصر، ونشأ وتربى وتعلم بها حتى نبغ فى الجبر وحاز شهرة عظيمة فيه إلى الدرجة التى لقب معها باستاذ الجبر، وفاضل وقته وعالم زمانه وحاسب أوانه بحسب ابن القفطى.

عاش أبو كامل فى عصر الخوارزمى وتتلمذ على كتبه، وكان من العلماء الذين يفخرون بتعلمهم العلوم على علماء العرب والمسلمين، فكان فخوراً بأنه تتلمذ على كتب علامة الإسلام فى الجبر محمد بن موسى الخوارزمى.

ألف أبو كامل كتب عديدة فى الرياضيات بحسب صاحب الفهرست، منها: كتاب المساحة والهندسة، كتاب الجمع والتفريق، كتاب الخطأين، كتاب الجبر والمقابلة، وهو الكتاب الوحيد الذى وصل إلينا من مؤلفات المصرى الحاسب، وذلك بخلاف مؤلفات أخرى وصلت إلينا من مصادر غير عربية مثل "كتاب طرائف الحساب" المحفوظ مخطوطه فى مكتبة ليدن بهولندا.

ويعترف أبو كامل المصرى الحاسب بفضل الخوارزمى عليه، فيذكر فى مقدمة كتابه الذى أسماه أيضاً "الجبر والمقابلة" أن كتاب محمد بن موسى الخوارزمى المعروف بكتاب الجبر والمقابلة أصح الكتب الرياضياتية أصلاً، وأصدقها قياساً، وكان مما يجب علينا من التقدمة والإقرار له بالمعرفة والفضل، إذ كان السابق إلى كتاب الجبر والمقابلة، والمبتدئ له، والمخترع لما فيه من الأصول التى فتح الله لنا بها ما كان منغلقاً، وترك (مؤلفها) شرحها وإيضاحها، ففرعت منها مسائل كثيرة يخرج أكثرها إلى غير الضروب الستة التى ذكرها

الخوارزمى فى كتابه، فدعانى إلى كشف ذلك وتبيينه، فألفت كتاب الجبر والمقابلة، وبيّنت شرحه فى كتاب الأرثماطيقى فى الأعداد والجبر والمقابلة.

ويعد هذا الكتاب أشهر كتب أبى كامل، واستمر فاعلاً فى التقاليد الرياضياتية عبر العصور اللاحقة، ووضعت له شروحات كثيرة. وقد وصل إلينا فى نسختين مخطوطتين عربيتين، وتُرجم إلى اللغة العبرية ترجمة ناقصة، وتُرجم إلى اللغة الإنجليزية ونُشر سنة 1966 بمعرفة مارتن ليفى.

ويشتمل كتاب الجبر والمقابلة لأبى كامل على معادلات الخوارزمى الست شارحاً لها، ومعللاً لبعضها مثل المعادلة $س^2 = 5$ التى عللها هندسياً عن طريق خمسة خطوط موازية لأحد أضلاع مربع ضلعه س تقسم المربع أقساماً متساوية. كما أضاف أبو كامل على معادلات الخوارزمى معادلات كثيرة بلغت تسع وستين معادلة وربطها بالهندسة. ويعد أبو كامل، بحسب مارتن ليفى، أول من حل المعادلات الجبرية التى درجتها أعلى من الدرجة الثانية بوضوح تام. ووردت هذه الحلول لأول مرة فى تاريخ الرياضيات ضمن مصنفاته فى المضلعين الخماسى والعشارى، فضلاً عن كتاب الجبر والمقابلة، ومنها المعادلات التالية:

$$س^2 + ص^2 = ع^2$$

$$س\ ع = ص^2$$

$$س + س + 2\ س + م\ س^2 = 10$$

$$س + ص + ع = 10 \text{ ، } س < ص < ع \text{ .}$$

$$\frac{10}{س} + \frac{10}{10 - س} = 6\frac{1}{4} \text{ .}$$

$$\frac{\sqrt{10\text{س}}}{\sqrt{3+3}} = \text{س} - 10$$

وإذا كان الخوارزمى قد أوجد الجذر الحقيقى الموجب لمعادلات الدرجة الثانية، فإن أبا كامل اهتم بإيجاد الجذرين الموجب والسالب، واستطاع حل الكثير من المعادلات المحتوية على مجهولين وأكثر حتى خمسة مجاهيل، وهاك مثال لحل أبى كامل لمعادلة تحتوى على خمسة مجاهيل:

دفع إليك مائة درهم، وقيل لك ابتع بها مائة طير من خمسة أصناف: بط وحمام وفواخت وقنابر ودجاج، كل بطة بدرهمين، والحمام إثنين بدرهم، والفواخت كل واحد بثلاثة دراهم، والقنابر كل واحد بأربعة دراهم، والدجاج كل واحدة بدرهم.

الحل: افرض أن عدد البط = س ، وعدد الحمام = ص ، وعدد الفواخت = ز ، وعدد القنابر = ع ، وعدد الدجاج = م.

اشترى من البط عدداً قيمته 2 س درهم.

واشترى من الحمام عدداً قيمته $\frac{\text{ص}}{2}$ درهم .

واشترى من الفواخت عدداً قيمته $\frac{\text{ز}}{3}$ درهم .

واشترى من القنابر عدداً قيمته $\frac{\text{ع}}{4}$ درهم .

واشترى من الدجاج عدداً قيمته م درهم .

وبمعادلتين خطيتين يمكن التعبير عن صيغة السؤال هكذا :

س+ ص+ ز + ع+ م= 100 ⟵ م= 100− س− ص− ز− ع .... (1)

$$2\text{س} + \frac{\text{ص}}{2} + \frac{\text{ز}}{3} + \frac{\text{ع}}{4} + \text{م} = 100 \quad \leftarrow$$

$$\text{م} = 100 - 2\text{س} - \frac{\text{ص}}{2} - \frac{\text{ز}}{3} - \frac{\text{ع}}{4} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

من (1) ، (2) ينتج أن :

$$100 - \text{س} - \text{ص} - \text{ز} - \text{ع} = 100 - 2\text{س} - \frac{\text{ص}}{2} - \frac{\text{ز}}{3} - \frac{\text{ع}}{4}$$

$$2\text{س} - \text{س} = \left(\text{ص} - \frac{\text{ص}}{2}\right) + \left(\text{ز} - \frac{\text{ز}}{3}\right) + \left(\text{ع} - \frac{\text{ع}}{4}\right)$$

$$\text{س} = \frac{\text{ص}}{2} + \frac{2}{3}\text{ز} + \frac{3}{4}\text{ع}$$

وهذه المسألة التى تحتوى على خمسة مجاهيل يذكر أبو كامل أن لها بعد هذا الحل 2696 جواباً ممكناً.

وهكذا يتضح أن أبا كامل كمّل جبر الخوارزمى وأضاف عليه، ففسر مبادءه بطريقة جازمة، وعالج الجذور الصم، وأجرى العمليات الحسابية من جمع وطرح على الحدود الجبرية، وكل هذه العمليات مثّلت تطويراً مهماً لعلم الجبر فى العصور اللاحقة لأبى كامل، وأثرت فيمن جاء بعده من علماء الرياضيات المسلمين كالكرخى وعمر الخيّام، وامتد التأثير إلى علماء الغرب، بل وعلماء الأرض على حد قول فلورين كاجورى فى كتابه "تاريخ الرياضيات" حيث قال: "كانت مؤلفات أبى كامل خلال القرن الثالث عشر للميلاد من المراجع الفريدة لعلماء الرياضيات فى جميع أنحاء المعمورة". وكما اعتمد العالم ليوناردوا بيزى على مؤلفات أبى كامل، قرر هورد إيفز أن العالم الرياضياتى المشهور "فابوناسى" استند فى مؤلفاته فى علمى الحساب والجبر على مؤلفات الخوارزمى وأبى كامل المصرى.

الفصل الرابع

أبو الوفاء البوزجانى

أبو الوفاء البوزجانى

(329- 388هـ / 940- 998م)

أبو القاسم محمد بن يحيى، ولد فى قرية بوزجان بخراسان التى شب بها وتعلم حتى سن العشرين، فدرس الرياضيات على عمه أبى عمر المغازى، وخاله أبى عبدالله محمد بن عنبه، ودرس الهندسة على أبى يحيى الماوردى وأبى العلاء بن كرنيب، ثم انتقل إلى بغداد سنة 348هـ / 959م، وقضى بقية عمره فيها مشتغلا بالتأليف والرصد والتدريس.

يعد أبو الوفا أحد الأئمة المعدودين فى الرياضيات والفلك[1]، وألف فيهما مؤلفات مهمة، أفادت منها الإنسانية، فلقد برع أبو الوفاء فى الهندسة، واكتشف فيها كشوفاً لم يسبقه إليها أحد، وكذلك الجبر، حيث زاد فى بحوث الخوارزمى زيادات تعد أساساً لعلاقة الهندسة والجبر، ومنها أنه حل هندسياً معادلات من الدرجة الرابعة، وأوجد حلولاً تتعلق بالقطع المكافئ مهدت السبيل لعلماء الغرب فيما بعد أن يدعوا تقدمهم خطوات واسعة أدت إلى أروع ما وصل إليه العقل البشرى، وهو التفاضل والتكامل، وينكشف إدعاؤهم إذا علمنا

---

(1) ثبت حديثاً فى أكاديمية العلوم الفرنسية أن الإختلاف الثالث فى حركة القمر هو من اكتشاف البوزجانى، وليس - كما عرف العالم زوراً لقرون عدة - تيكو براهى الدينماركى. فلقد اكتشف أبو الوفاء "الإختلاف القمرى الثالث"، والذى يُعرف "بالإختلاف Variation" وهو عبارة عن انخراط أو حركة غير ثابتة فى القمر أثناء سيره بين سنة وأخرى. وكان هيباخورس أول من قاس أول اختلاف للقمر، والاختلاف أو الإنحراف الثانى اكتشفه بطليموس، واكتشف أبو الوفاء الاختلاف الثالث، ولا يُخفى ما لهذا الاكتشاف من أهمية قصوى فى اتساع نطاق علم الفلك. وقد وصف الغربيون صاحبه وهو البوزجانى بأنه أعظم ذهنية فلكية نبغت فى الإسلام.

أن علم التفاضل والتكامل تم اكتشافه فى الحضارة الإسلامية أيضاً على يد ثابت بن قرة كما مر سابقاً.

ويعترف علماء الغرب[1] بأن أبا الوفاء هو أول من وضع النسبة المثلثية "ظل" وأول من استعملها فى حلول المسائل الرياضياتية، وأدخل القاطع، والقاطع تمام ودرس تربيع القطع المخروطى المكافئ بأنواعه الثلاثة: قطع مكافئ Parabola ، وقطع ناقص Ellipse ، وقطع زائد Hyperbola ، كما درس المساحة الحجمية للقطع المكافئ المجسم Paraboloid ، وأوجد طريقة جديدة لحساب جداول االجيب التى امتازت بدقتها، حتى أن جيب الزاوية 30 درجة كان صحيحا إلى ثمانية أرقام عشرية. كما وضع البوزجانى الجداول للمماس، ووضع المعادلات التى تتعلق بجيب زاويتين. وبهذه الاكتشافات، وخاصة وضع "ظل" فى عداد النسبة المثلثية أصبح البوزجانى فى نظر علماء الغرب من الخالدين، حيث أسس بذلك ووضع أحد الأركان التى قام عليها علم حساب المثلثات الحديث، وأصبح أكثر بساطة ووضوحاً بوضعه هذا القانون:

جا (أ + ب) = جا أ جتا + جا ب جتا أ

ك (الكمية)

ولأبى الوفاء مؤلفات أخرى مهمة، منها كتاب "منازل الحساب"، وكتاب "فيما يحتاج إليه الصناع من أعمال الهندسة"، وضعه بناءً على طلب بهاء الدولة ليتداوله أرباب الصناعة[2].

---

(1) أمثال: سارتون، وكرادى فو، وسميث ... وغيرهم.

(2) أبو الوفا البوزجانى، فيما يحتاج إليه الصناع من أعمال الهندسة، مخطوط أيا صوفيا رقم 2753، والأمبروزيانا كتالوج 44 رقم 68.

وتظهر عبقرية البوزجانى أيضاً فى تطويره لفن الرسم الهندسى حيث ألف فيه كتاباً وصفه الغربيون بأنه أروع وأهم ما كتب فى هذا الفن، وترجموه باسم Construction Geometriques كتاب فى عمل المسطرة والبركاروالكونيا، ويعنى البوزجانى بالكونيا، المثلث القائم الزاوية، ويتكون الكتاب من ثلاثة عشر بابا، هى:

الباب الأول: فى عمل المسطرة والبركار.

الباب الثانى: فى عمل الأشكال فى الدوائر.

الباب الثالث: فى عمل الدائرة على الأشكال.

الباب الرابع: فى الأشكال بعضها فى بعض.

الباب الخامس: فى الأصول والكونيا.

الباب السادس: فى عمل الأشكال المتساوية.

الباب السابع: فى قسمة المثلثات.

الباب الثامن: فى قسمة المربعات.

الباب التاسع: فى عمل مربعات من مربعات وعكسها.

الباب العاشر: فى قسمة الأشكال المختلفة الأضلاع.

الباب الحادى عشر: فى الدوائر المتماسة.

الباب الثانى عشر: فى قسمة الأشكال على الكرة.

الباب الثالث عشر: فى عمل الدائرة فى الأشكال.

يتضح من استعراض أبواب الكتاب أنه يحتوى على طــرق لإنــشاء الأجسام المنتظمة كثيرة السطوح حول الكرة مستعملاً طرقاً مختلفة لحل عملية واحدة، وفيه طرق خاصة ومبتكرة لكيفية الرسم الهندسى واســتعمال الآلات اللازمة لذلك مما حدا بعلماء الغرب أن يجمعوا على أن هذه الطرق قد دفعت بأصول الرسم الهندسى خطوات مهمة إلى الأمام.

الفصل الخامس

الكوهى

الكوهى
(ت 405هـ / 1014م)

أبو سهل بن رستم، ولد ونشأ فى الكوة من جبال طبرستان، وتعلم وعاش فى بغداد، ونبغ فى الرياضيات والفلك إبان عصر ازدهار الحضارة الإسلامية، فقرّبه شرف الدولة البويهى وعينه سنة 378هـ/ 988م رئيساً للمرصد الذى أسسه ببغداد، فقام برصد تنقلات ومسارات الكواكب السبعة وقدمها فى صورة دراسات لشرف الدولة، ودوّنها فى كتبه الفلكية مثل كتاب "صناعة الاسطرلاب بالبراهين" الذى انتقد فيه بعض الفرضيات اليونانية الفلكية، واشتهر الكوهى بصناعة الآلات الرصدية، ووضع عدداً من الأرصاد التى أُعتمد عليها فى عصره وما تلاه.

أما فى الرياضيات فقد وضع عدداً من المؤلفات الهندسية أهمها: إخراج الخطين من نقطة على زاوية معلومة، كتاب الأصول على تحريكات أقليدس، كتاب مراكز الأُكر، كتاب الزيادات على أرشميدس فى المقالة الثانية، تثليث الزاوية وعمل المسبع المتساوى الأضلاع فى الدائرة.

ومن إنجازاته الهندسية اهتمامه بمسائل أرشميدس وأبولونيوس التى تؤدى إلى معادلات ذات درجة عالية من معادلات الدرجة الثانية، فالفروض التى لم يستطع أرشميدس إثباتها فى كتابه "الكريات والاسطوانات"، وقد أثارت بحثا عند ابن الهيثم وغيره من العلماء، وضع الكوهى هذه المسألة على هذا النحو: لإنشاء قطعة من كرة حجمها يساوى حجم قطعة من كرة أخرى ومساحة سطحها الجانبى يساوى مساحة السطح الجانبى لقطعة كروية أخرى.

وقد تمكن الكوهى من استخراج حلها ببراعة فائقة، وذلك باستعانته بقطعتين مخروطتين هما القطع الزائدة والقطع المنتظم بالإضافة إلى

مخروطين مساعدين، ثم ناقش الحدود، فحلت المسألة التى شكلت أهمية فـــى تاريخ الهندسة، وعدت من أحسن ما كتب عن الهندسة عند المسلمين.

وإذا كان ثابت بن قرة قد ابتدع علم التفاضل والتكامل بإيجاده حجــم الجسم المتولد من دوران القطع المكافئ حول محوروه، فإن الكوهى قد طــوّر مسيرة هذا العلم بإيضاحه كيفية إنشاء قطعة كروية تكافئ قطعة كروية أخرى معلومة، وتساوى مساحة سطحها الجانبى مساحة السطح الجانبى لقطعة كروية ثابتة معلومة.

وباستخدام البراهين الهندسية فى حل كثير من المسائل التى لها علاقة بإيجاد الثقل، سجل الكوهى السبق للمسلمين فى دراسة الأثقال، وبحوثه التــى أسست للمبادئ التى تقوم عليها الروافع خير دليل على ذلك.

الفصل السادس

الكرخى

الكرخي

(350 - 421هـ / 961 - 1034م)

أبو بكر محمد بن الحاسب الكرخي، أُختلف في لقبه بين الكرخي، والكرجي، الأول نسبة إلى ضاحية كرخ من ضواحي بغداد، والثاني نسبة إلى كرج القريبة من همذان، إلا أن مؤيدات كثيرة تشير إلى أنه "الكرخي"، ومنها أن معظم مؤلفاته تحمل هذا الاسم.

عاش الكرخي في بغداد ودرس بها، وألف فيها معظم انتاجه العلمي الذي جعله من أعظم الرياضيين المسلمين، وفي بغداد توفي.

ألف الكرخي ما يربو على العشرين مؤلفا معظمها في الحساب والجبر والهندسة عملت على تطور الرياضيات في عصره، وما تلاه من عصور حتى العصر الحديث، على ما سيتبين لاحقاً بعد استعراض قائمة مؤلفاته، ما وصلنا منها، وما لم يصل:

البديع في الحساب[1]، الدور والوصايا، رسالة استخراج الجذور الصماء وضربها وقسمتها، رسالة تحتوي على ما يزيد على 250 مسألة متنوعة، رسالة الحالات الست في الجبر، رسالة في بعض النظريات في الحساب والجبر، رسالة في برهان النظريات المتعلقة بإيجاد مجموع مربعات ومكعبات الأعداد الطبيعية، رسالة في علاقة الرياضيات بالحياة العملية، رسالة في المعاملات وفك ذوات الحدين، رسالة الطرق الحسابية لتسهيل بعض

---

(1) مخطوط مكتبة الفاتيكان ثالث Barb 36 رقم1. حققه عادل أنبوبا ونشرته الجامعة اللبنانية، بيروت 1964.

العمليات الحسابية، رسالة فى مساحات بعض السطوح، رسالة فى النسبة، كتاب أنباط المياه[1]، كتاب فى الحساب الهندى، كتاب فى الاستقراء، كتاب العقود والأبنية، كتاب المدخل فى علم النجوم، علل حساب الجبر والمقابلة[2]، الفخرى فى الجبر[3]، الكافى فى الحساب[4]، مختصر فى الحساب والمساحة[5].

انصب جُل اهتمام الكرخى على علم الحساب وعلم الجبر، لما للأول من أهمية فى إخراج المجهولات من المعلومات، ولما للثانى من قوة واطراد فى مختلف المسائل الهندسية. ولما رأى أن سابقيه من المؤلفين لم يشرحوا مقدمات مؤلفاتهم كى تصل إلى الغاية منها، شرع فى تأليف كتابه "الكافى فى الحساب" الذى يقول فى مقدمته[6]: وجدت علم الحساب موضوعاً لإخراج المجهولات من المعلومات فى جميع أنواعه، وألفيت أوضح الأبواب إليه،

---

(1) مخطوط مكتبة آصفية 1/ 197 رقم 128، ومكتبة باتنة 2/ 335 رقم 2519 (1)، ومكتبة بنكيبور 22/ 84 رقم 2468.

(2) مخطوط مكتبة بودليانا رقم 1/ 986/ 3.

(3) مخطوط مكتبة أسعد أفندى باستانبول رقم 3157، ومكتبة الأوقاف ببغداد رقم 5440، ومكتبة باريس رقم 2459، ومكتبة دار الكتب المصرية رقم 23 رياضيات، ومكتبة كوبريلى باستانبول رقم 950، ومكتبة لالهلى باستانبول رقم 1714/ 2.

(4) مخطوط مكتبة جوتا رقم 1474، ومكتبة داماد ابراهيم باشا رقم 855، ومكتبة طوبقبو سراى رقم 3135، 3464/ 16، ومكتبة سباط رقم 111، ومكتبة الفاتح رقم 3439/ 2، ومكتبة كوبريلى رقم 950.

(5) مخطوط مكتبة بلدية الاسكندرية رقم 82 فنون/ 4.

(6) الكرخى، الكافى فى الحساب، مخطوط مكتبة كوبريلى باستانبول رقم 950، ورقة 3 ظ.

وأول الأسباب عليه، صناعة الجبر والمقابلة لقوتها واطرادها في جميع المسائل الحسابية على اختلافها، ورأيت الكتب المصنفة فيها غير ضامنة لما يحتاج إليه من معرفة أصولها، ولا وافية بما يستعان به علم فروعها، وأن مصنفيها أهملوا شرح مقدماتها التى هى السبيل إلى الغاية، والموصلة إلى النهاية، ثم لم أجد فى كتبهم لها ذكرا، ولا بياناً، فلما ظفرت بهذه الفضيلة واحتجت إلى جبر تلك النقيصة، لم أجد بداً من تأليف كتاب يحيط بها ويشتمل عليها، ألخص فيه شرح أصولها.

شرع الكرخى بعد دراسة جبر الخوارزمى وتطويره بمعرفة أبى كامل المصرى وآخرين من علماء الرياضيات فى الحضارة الإسلامية، شرع فى "حسبنة الجبر"، وفى سبيل ذلك بحث فى كافة السبل التى تحقق له استغناء العمليات الجبرية عن التمثيل الهندسى. وقد استطاع بالفعل أن يحقق تلك الخصوصية الجبرية وجاءت نظريته التى وقف عليها فبكه Woepke أحد علماء الرياضيات الغربيين المشهورين، وانتهى بعد دراسته لكتاب الكافى فى الحساب للكرخى سنة 1853 مقرراً أنها النظرية الأكثر اكتمالاً، أو بالأصح النظرية الوحيدة فى الحساب الجبرى عند العرب التى نعرفها حتى الآن.

وضع الكرخى تطويراً فريداً لقانون حل معادلات الدرجة الثانية لم يسبقه إليه أحد، وأصبح قانوناً رئيساً فى علم الجبر ينص على:

$$س = [\frac{ب}{2} - (\frac{ب}{2})^2 + أ\,جـ] \div أ$$

ولإيجاد الجذر التقريبى للأعداد التى ليس لها جذر مثل $م = ب^2 + جـ$، طوّر الكرخى القانون الخاص بذلك، وابتكر صيغة جديدة تُخرج الجذر التقريبى لما لا يمكن اخراجه من الأعداد مثل العدد (7) هكذا :

$\sqrt{م} = ب + \frac{جـ}{2ب + 1}$

7 = 4 + 3 حيث م = ب^2 + جـ

م = 7 ، ب = 2 ، جـ = 3

فينتج أن: $\sqrt{7} = 2 + \frac{3}{4+1} = 2\frac{3}{5} = 2.6$

وأوجد الكرخى الجذر التربيعى للعدد (10) هكذا :

$10 = 3^2 + 1$

م = 10 ، ب = 3 ، جـ = 1 ، فينتج أن :

$\sqrt{10} = 3 + \frac{1}{6} = 3\frac{1}{6} = 3.16$

والجذر التربيعى للعدد (10) حالياً = 3.162

وابتكر الكرخى طريقة معالجة مختلف المتواليات، فقد وجد أن مجموع المتوالية: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots$ إلى الحد "ن" هو:

$\frac{1}{6}$ [ن (ن + 1) (2ن + 1)] ، ولكنه لم يقدم البرهان عليها، إلا أنه يُعد أول من عالج وبرهن على المتوالية التى سماها "الإندراجية" وهى:

[هـ (هـ + 1)]، وكذلك المتواليات التالية:

- مجموع مربعات الأعداد من 1 إلى ن = (1 + ن) ن ($\frac{ن}{3} + \frac{1}{6}$)

- المجموع من 1 إلى ن لحاصل الضرب (ن + 1 − هـ) (ن + 1 = هـ)
= (ن + 1)^2 − المجموع من 1 إلى ن (هـ^2).

- المجموع من 1 إلى $ن^{-1}$: هـ (هـ + 1) + ($\frac{ن}{3}$) $(ن^{-1})$ (ن +1)

- 1 + 2 + 3 + ... + ن = $ن^2$ + ن

- 1 + 3 + 5 + ... + $ل^ن$ = ($\frac{2}{ن}$) (1 + ل)

واستنتج الكرخى المعادلة التى لا يخلو منها كتاب فى الجبر وهى: أ $س^ن$ + ب $ص^ن$ = م $ع^{ن-1}$. وقد استنتجها عن طريق حله لمعادلة عددين مجموع مكعبيهما يساوى مربع العدد الثالث، بمعنى أن $س^3$ + $ص^3$ = $ع^2$. وباستعمال الأعداد الجبرية، فرض الكرخى أن ص = م س، ع = ن س.

ومن هنا، فإن $س^3$ + $ص^3$ = $ع^2$ ⟵ $س^3$ + $م^3$ $س^3$ = $ن^2$ $س^2$ ⟵ $س^3$ (1 + $م^3$) = $ن^2$ $س^2$.

وبقسمة الطرفين على $س^2$ ⟵ س (1+ $م^3$) = $ن^3$.

إذن س = $\frac{ن^2}{1 + م^3}$ باعتبار أن م ، ن عددين جذريين، وباعتبار أن س = 1، ص = 2 ، ع = 3، فيكون الناتج 1 + 2 = 3 ، ومنه ينتج أن:

أ $س^ن$ + ب $ص^ن$ = م $ع^{ن - 1}$

وابتكر الكرخى قانوناً يسمح بجمع وطرح الأعداد الصم، وهى الأعداد التى ليس لها جذر، وهو:

$$\sqrt{أ} + \sqrt{ب} = \sqrt{(أ + ب) + 2\sqrt{أب}}$$

ولتطبيقه ضرب الكرخى المثال التالى :

$\sqrt{15} = \sqrt{12 \times 3}\ 2 = (12 + 3)\sqrt{\ } = \sqrt{12} + \sqrt{3}$

$\sqrt{3}\ 3 = \sqrt{37} = \sqrt{12 - 15} = \sqrt{36}\ 2$

ومن أهم مبتكرات الكرخى اكتشافه نظرية ذات الأسين (ذات الحدين) لأسس صحيحة موجبة، وترتيبه معاملات مفكوك (س + 1)ن ، فجاء مثلثه لمعاملات نظرية ذات الحدين، ذلك المثلث المشهور الذى أخذه بسكال الفرنسى (1623- 1662) وادعاه لنفسه حتى أشتهر المثلث فى تاريخ الرياضيات بمثلث بسكال، وليس مثلث الكرخى، وهاك هو:

كعب كعب كعب كعب	مال كعب كعب كعب	مال مال كعب كعب	كعب كعب كعب	مال كعب كعب	مال مال كعب	كعب كعب	مال كعب	مال مال	كعب	مال	شيء
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
66	55	45	36	28	21	15	10	6	3	1	
220	165	120	84	36	35	20	10	4	1		
495	330	210	126	70	35	15	5	1			
792	462	252	126	56	21	6	1				
924	462	210	84	28	7	1					
792	330	120	36	8	1						
495	165	45	9	1							
220	55	10	1								
66	11	1									
12	1										
1											

لقد أثرت ابتكارات الكرخى الجبرية وإنجازاته الرياضياتية فى العصور اللاحقة وحتى العصر الحديث، حيث ظل الغرب يستفيد من جبر وحساب الكرخى حتى القرن التاسع عشر، فترجم هو سهيلم كتاب الكرخى "الكافى فى الحساب" إلى اللغة الألمانية، وبه أصبحت أوربا – بحسب جورج سارتون – مدينة للكرخى الذى قدم للرياضيات أعم وأكمل نظرية فى علم الجبر عرفتها، وبقيت حتى القرن التاسع عشر الميلادى تستعمل مؤلفاته فى علمى الحساب والجبر. ويصرح أحد مؤرخى الرياضيات الغربيين وهو موريس كلاين أن الكرخى البغدادى العالم المشهور الذى عاش فى أوائل القرن الحادى عشر الميلاى يعتبر مفكراً من الدرجة الأولى، وهذا يظهر من كتابه "الفخرى فى الجبر"، فطوّر هذا الحقل إلى درجة يمكن التعرف على عقليته الجبارة خلالها.

ويُعد الكرخى – تبعاً لهورد إيفز – من بين العلماء الرياضيين المبتكرين لما فى كتابه الفخرى من نظريات جبرية جديدة تدل على عمق وأصالة فى التفكير، وهو أحسن كتاب فى علم الجبر فى العصور الوسطى، مستنداً على كتاب محمد بن موسى الخوارزمى "الجبر والمقابلة"، وامتاز كتاب الفخرى بطابعه الأصيل فى علم الجبر لما فيه من الابتكارات الجديدة والمسائل التى لا يزال لها دور فى الرياضيات الحديثة.

الفصل السابع

عمر الخيّام

عمر الخيّام

(ت 515هـ - 1121م)

أبو الفتح عمر بن إبراهيم النيسابورى، المكنى بالخيام لأنه كان فى صغره يشتغل بحرفة صنع وبيع الخيام. ومنذ صباه تنقل فى طلب العلم حتى استقر فى بغداد سنة 466هـ - 1074م. أبدع الخيام فى كثير من العلوم والمعرفة مثل اللغة والأدب والرياضيات والفلك والفقه والتاريخ. وعلى الرغم من شهرته بقصائده المعروفة بالرباعيات التى لا تخلو منها أى مكتبة فى العالم، إلا أنه كان رياضياتياً بارعاً وفلكياً أصيلاً. ألف الخيام مؤلفات كثيرة فى معظم فروع العلم والمعرفة المعروفة فى عصره ومنها: رسالة فى شرح ما أشكل من مصادرة كتاب أقليدس، رسالة فى النسب، رسالة فى البراهين على مسائل الجبر والمقابلة، رسالة الميزان الجبرى، رسالة فى فرضية المتوازيات الإقليديسية، الرباعيات شعر، كتاب مشكلات الحساب، رسالة فى حساب الهند، كتاب زيج ملكشاه (جداول فلكية)، كتاب المقنع فى الحساب الهندسى، رسالة فى المعادلات ذات الدرجة الثالثة والرابعة، خمس رسائل فلسفية.

اطلع الخيام على أعمال الخوارزمى، وتناولها بالدرس جاعلاً من نفسه منافساً للخوارزمى يحاول أن يصل إلى أشياء جديدة لم يصل إليها، واستمر الخيام على هذا الوضع إلى أن وضع كتابه: "فى الجبر" الذى فاق كتاب الخوارزمى فى نظر بعضهم.

فلئن كانت المعادلة البسيطة ذات الحدين (ص – س) و (م س = س^2) بأشكلها الستة معروفة منذ عصر الخوارزمى، إلا أن التوسع فى تقسيم

المعادلات وتصنيفها لم يعرف قبل الخيام. كذلك تمكن عمر الخيام من حل المعادلات من الدرجتين الثالثة والرابعة، وهذه قمة ما وصل إليه الرياضيون المسلمون، فكتابه "فى الجبر" يعتبر من الدرجة الأولى، ويمثل تقدما عظيما جداً على ما نجده من هذا العلم عند الإغريق، لقد أحرز تفوقاً على (الخوارزمى) نفسه فى درجات المعادلة بصفة خاصة. فقد خصص القسم الأكبر من كتابه لمعالجة المعادلات التكعيبية، بينما لم يقصد الخوارزمى إلا المعادلات التربيعية بصدد بحث المسائل فى الحلول.

وقد صنف الخيام المعادلات ذات الدرجة الثالثة إلى سبعة وعشرين نوعاً، ثم عاد فقسمها إلى أربعة أشكال، الأثنتان الأخيرتان تتألفان من معادلات ثلاثية الحدود ورباعية الحدود. أما الشكل الرابع فيتألف من ثلاث صنوف:

$$س^3 + ب\ س = جـ\ س + هـ$$

$$س^3 + جـ\ س = ب\ س^2 + هـ$$

$$س^3 + هـ = ب\ س^2 + جـ\ س$$

وقد قدم الخيام الحلول على هذه الأصناف، بالإضافة إلى حلوله لمعادلات الدرجة الثالثة كلها، وهو ما لم يجده الخيام فى كتب السابقين عليه. يقول فى مقدمة كتابه: إنك لواجد فى هذه الدراسة فروضاً تعتمد على نظريات ابتدائية معينة فى غاية الصعوبة والتعقيد، لم يصل إلينا من أبحاث القدماء ما ينير لنا السبيل إلى معالجتها أبدا.

فركز الخيام جُل اهتمامه على حل جميع أنواع معادلات الدرجة الثالثة، وهى المسألة التى صعبت على أسلافه ولم يتوصلوا إلى حل لها. ولما

لاحظ الخيام أن أسلافه لم يتمكنوا من حل هذه المعادلات بالجذور، لجأ هو إلى الطريق الهندسي. ويذكر كارادى فو أن طريقة حل الخيام لمعادلات الدرجة الثالثة تبدو بنصها الحرفى تقريباً فى كتاب "الجومطرى" لديكارت.

وقد مهدت الأبحاث فى الاتجاه الهندسى الطريق للعمل الجبرى للخيام الذى يشكل الإنطلاقه الأولى للهندسة الجبرية. فمع الخيام لم تعد المسألة مسألة حل هذه أو تلك من معادلات الدرجة الثالثة التى يطرحها بحث ما، بل مسألة مشروع لحل جميع الصناف الـ 25 للمعادلات من الدرجة الثالثة وما دون[1].

ويعد عمر الخيّام – تبعاً لسارتون – أول من أبدع فكرة التصنيف، فعُد بذلك أول من مهد الطريق أمام تدشين "الهندسة التحليلية"، إذ قام بتصنيف المعادلات بحسب درجتها، وبحسب الحدود التى فيها محصور فى أربعة عشر نوعاً، وبرهن هندسياً على حل كل معادلة منها باستخدام القطوع المخروطية الثلاث:

الدائرة: (س – أ)^2 + (ص – ب)^2 = جـ^2

القطع المكافئ: ص^2 = أ س + ب، أو س^2 = أ ص + ب

القطع الزائد: (ص^2 – س^2) = جـ أو س ص = ب

أو (س – أ) (ص – ب) = جـ

قسم الخيّام المعادلات التكعيبية إلى أربعة عشر صنفاً تمثلها المعادلات التالية[2]:

---

(1) رشدى راشد، وبيجان وهاب زادة، رياضيات عمر الخيام، ترجمة نقولا فارس، مركز دراسات الوحدة العربية، بيروت 2005، ص175.

(2) المرجع نفسه.

المعادلة 3 .... $x^3 = c$ (م.م)

المعادلة 13 .... $x^3 + bx = c$ (م . د) قطع مكافئ ودائرة

المعادلة 14 .... $x^3 + c = bx$ (م. ز) قطع مكافئ وقطع زائد

المعادلة 15 .... $x^3 = bx + c$ (م. ز)

المعادلة 16 .... $x^3 = ax^2 = c$ (م. ز)

المعادلة 17 .... $x^3 + c = ax^2$ (م. ز)

المعادلة 18 .... $x^3 = ax^2 + c$ (م. ز)

المعادلة 19 .... $x^3 + ax^2 + bx = c$ (د. ز)

المعادلة 20 .... $x^3 + ax^2 + c = bx$ (ز. ز)

المعادلة 21 .... $x^3 + bx + c = ax^2$ (ذ. ز)

المعادلة 22 .... $x^3 = ax^2 + bx + c$ (ز. ز)

المعادلة 23 .... $x^3 + ax^2 = bx + c$ (ز. ز)

المعادلة 24 .... $x^3 + bx = ax^2 + c$ (ذ. ز)

المعادلة 25 .... $x^3 + c = ax^2 + bx$ (ز. ز)

وباستخدام القطوع المخروطية الثلاث، وهى الدائرة والقطع المكافئ والقطع الزائد يحل الخيام هذه المعادلات فيستخدم قطعين متكافئين لحل المعادلة رقم 3، وقطع مكافئ ودائرة لحل المعادلة رقم 13، وقطع مكافئ

وقطع زائد لحل المعادلات من 14 إلى 18، ودائرة وقطع زائد لحل المعادلات 19، 21، 24، وقطعين زائدين لحل المعادلات 20، 22، 23، 25.

وجاء فى القرن السابع عشر الميلادى سيمون الهولندى (ت 1620) وتتبع تصنيف الخيام، وأدخل عليه بعض التعديلات الطفيفة، فنسب إليه علماء الغرب "فكرة التصنيف" وتناسوا مبتكرها الحقيقى عمر الخيام!

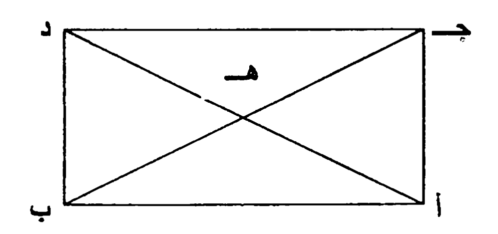
ويُعد الخيام من الرياضيين الذين اعتقدوا بضرورة الهندسة فى دراسة جميع ميادين العلوم، وعليه فقد أولى الهندسة أهمية خاصة ضمن أبحاثه الرياضياتية، وأفرد لها عدة مؤلفات شرح فيها هندسة إقليدس ونقدها، كما نقد محاولات سابقيه فى البرهنة على المصادرة الخامسة لإقليدس، وذهب إلى أن جميع براهين الرياضيات تنتمى إلى البرهان اللمى (لِمَ) الذى بُرهن به على سبب وجود الشىء أو سبب خواصه. وفى رسالته فى شرح ما أشكل من مصادرات كتاب إقليدس أتى الخيام بعدد من القضايا الرياضياتية الأساسية التى لا يمكن للرياضياتى الاستغناء عنها فى براهينه، ومنها انطلق الخيام فى البرهان على المصادرة الخامسة لأقليدس ممثلاً فى ثمانية أشكال كما يلى[1]:

الشكل الأول:

خط أ ب مفروض، ونخرج أ جـ عموداً على أ ب، ونجعل ب د عموداً على أ ب ومساوياً لخط أ جـ. فهما متوازيان، ونصل جـ د. فإن زاوية أ جـ د مساوية لزاوية ب د جـ.

---

(1) عمر الخيام النيسابورى، رسالة فى شرح ما أشكل من مصادرات كتاب إقليدس، تحقيق عبد الحميد صبرة، منشأة المعارف، الإسكندرية، 1961، ص19 وبعدها.



البرهان :

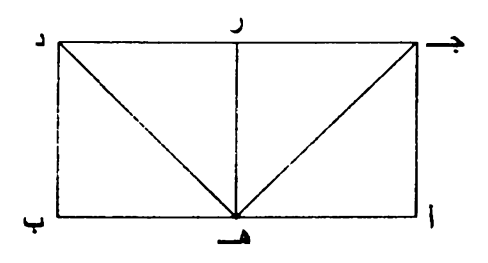
نصل جـ ب، أ د؛ فخط أ جـ مثل ب د ، أ ب مشترك. وزاويتا أ ، ب قائمتان؛ فقاعدتا أ د، جـ ب متساويتان، وسائر الزوايا مثل سائر الزوايا. فتكون زاويتا هـ أ ب، هـ ب أ متساويتين.

فخطا أ هـ، هـ ب متساويان. فيبقى جـ هـ، هـ د متساويين. فتكون زاويتا هـ جـ د، هـ د جـ متساويتين، أ جـ ب مثل أ د ب. فزاويتا أ جـ د، جـ د ب متساويتان.

ولذلك فإن زاويتا جـ أ ب، د ب أ إذا كانتا متساويتين كيفما كانتا، وخطا أ جـ، ب د متساويين، يجب أن تكون زاويتا ب د جـ ، أ جـ د متساويتين.

الشكل الثانى :

نعيد شكل أ ب جـ د، ونقسم أ ب بنصفين على هـ ، ونخرج هـ ر عموداً على أ ب؛ فإن جـ ر مثل ر د، هـ ر عموداً على جـ د.



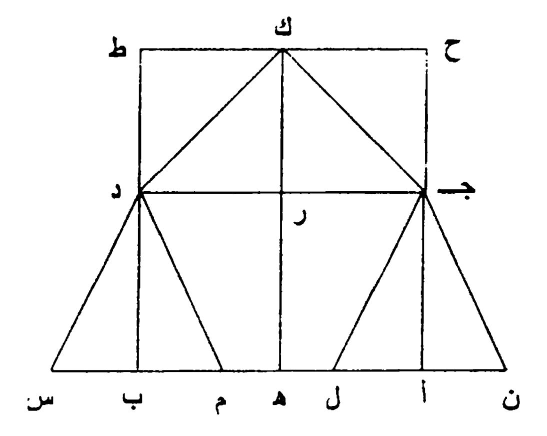
البرهان :

نصل جـ هـ، هـ د؛ فخط أ جـ مثل ب د، أ هـ مثل هـ ب؛ وزاويتا أ ، ب قائمتان. فقاعدتا جـ هـ ، هـ د متساويتان، وزاويتا أ هـ جـ ، ب هـ د متساويتان. فتبقى زاويتا جـ هـ ر ، ر هـ د متساويتين.

وخط جـ هـ مثل هـ د، هـ ر مشترك، والزاويتان متساويتان. فالمثلث مثل المثلث وسائر الزوايا والأضلاع النظائر متساوية، فيكون جـ ر مثل ر د، فهما قائمتان، وهو المطلوب إثباته.

الشكل الثالث :

ونعيد شكل أ ب جـ د ، فإن زاويتي أ جـ د ، ب د جـ قائمتان.



البرهان :

نقسم أ ب بنصفين على هـ، ونخرج عمود هـ ر، ونخرجه على استقامة. ونجعل ر ك مثل ر هـ، ونخرج ح ك ط عموداً على هـ ك. ونخرج أ جـ، ب د فيقطعان ح ك ط على ح، ط لأن أ جـ ، هـ ك متوازيان، ح ك ، ر جـ أيضاً متوازيان.

وكل متوازيين، لا يتغير البعد بينهما. فيمر أ جـ إلى مالا نهاية له موازياً هـ ك، ويمر ح ك إلى مالا نهاية له موازياً ر جـ. فهما يتلاقيان لا محالة. ونصل جـ ك، د ك؛ فخط جـ ر مثل ر د، ر ك مشترك وهو عمود. فقاعدتا جـ ك ، ك د متساويتان، وزاويتا ر جـ ك، ر د ك متساويتان. فتبقى زاوية ح جـ ك مثل ك د ط. وزاويتا جـ ك ر ، د ك ر متساويتان. فتبقى زاويتا جـ ك ح، د ك ط متساويتين. وخط جـ ك مثل د ك. فيكون جـ ح مثل د ط، ح ط مثل ك ط.

وزاويتا أ جـ د، ب د جـ إن كانتا قائمتين فقد حق الخبر. وإن لم تكونا قائمتين فتكون كل واحدة منهما إما أصغر من قائمة وإما أكبر. فلتكن أولاً أصغر من قائمة: فينطبق سطح ح د على سطح جـ ب، فينطبق ر ك على ر هـ، ح ط على أ ب، فيكون ح ط مثل خط ن س، لأن زاوية ح جـ ر أعظم من زاوية أ جـ ر، فخط ح ط أعظم من أ ب.

وكذلك إن أخرج الخطان إلى مالا نهاية له على هذا النسق يكون كل واحد من الخطوط الواصلة أعظم من الآخر ويتسلسل، فخطا أ جـ، ب د إلى الاتساع. وكذلك إن أخرج أ جـ، ب د على استقامة من الجهة الأخرى كانا الاتساع بمثل هذا البرهان وتشابه حال الجانبين عند الانطباق لا محالة، فيكون خطان مستقيمان يقطعان مستقيماً على قائمتين، ثم يتسع البعد بينهما من جهتي ذلك الخط، وهذا محال أولى عند تصور الاستقامة وتحقق البعد بين الخطين.

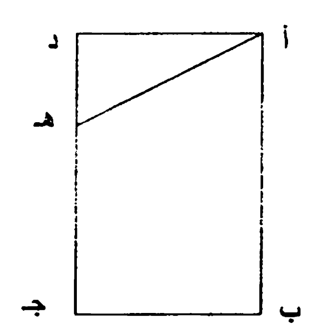
وإن كانت كل واحدة منهما أكبر من قائمة، فيكون عند الانطباق خط ح ط مثل ل م وهو أصغر من أ ب. وكذلك جميع الخطوط الواصلة على هذا النسق، فالخطان إلى التضايق. وإن أخرجا إلى الجهة الأخرى كانا إلى

التضايق أيضاً لتشابه حال الجهتين عند الانطباق. وهذا محال أيضاً لما ذكرنا.

وإذا امتنع أن يكون الخطان متفاضلين، فهما متساويان، وإذا كانا متساويين، فالزاويتان متساويتان، فهما قائمتان.

الشكل الرابع :

سطح أ ب جـ د زواياه قائمة، فإن أ ب مثل جـ د، أ د مثل ب جـ.

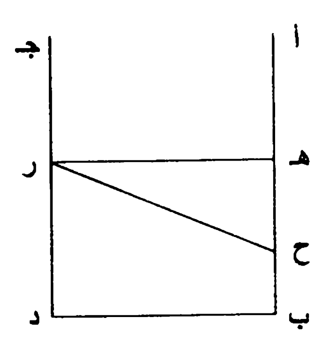


البرهان :

إن لم يكن أ ب مثل جـ د، فيكون أحدهما أعظم، فليكن جـ د أعظمهما، ونفصل جـ هـ مثل أ ب، ونصل أ هـ. فتكون زاوية ب أ هـ مثل زاوية جـ هـ أ ، ب أ هـ أصغر من قائمة، جـ هـ أ أعظم من قائمة لأنها خارجة عن مثلث أ هـ د، فتكون أعظم من زاوية د القائمة، وهذا محال. فخط أ ب مثل جـ د ، وهو المطلوب إثباته.

الشكل الخامس :

خطا أ ب ، جـ د متحاذيان ، فإن كل خط يكون عمودياً على أحدهما، فهو عمود على الآخر.

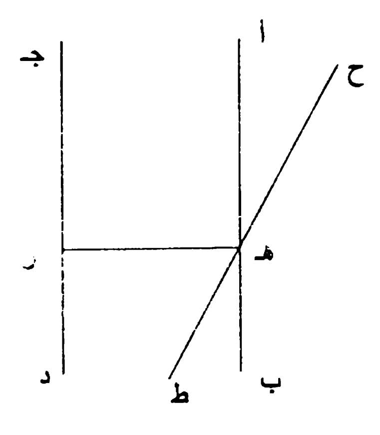


البرهان :

نخرج من نقطة هـ عموداً على جـ د، وهو هـ ر. فإن زاوية هـ قائمة. وإن خطى أ ب ، جـ د حاصلان من عمود عليهما لا محالة كما بينا، وهو د. فإن كان ب هـ مثل د ر، فزاوية هـ قائمة. وإن كان أحدهما أعظم، فنفصل من الأعظم مثل الأصغر، وهو ب ح الذى فصلناه من ب هـ. زاوية ح القائمة مثل زاوية ح ر د وهى أقل من قائمة، وهذا محال. فخط ب هـ مثل ر د ، وزاوية هـ قائمة. وهو المطلوب إثباته.

الشكل السادس :

كل خطين متوازيين كما حدّه إقليدس، وهما اللذان لا يلتقيان من غير شرط آخر، فهما متحاذيان، ومثاله: أ ب ، جـ د متوازيان، فإنهما متحاذيان.

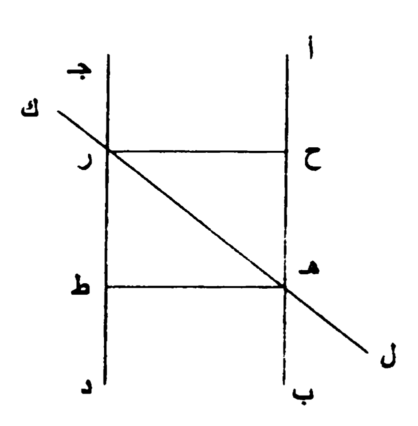


البرهان :

نعلّم نقطة هـ، ونخرج هـ ر عموداً على جـ د. فإن كانت زاوية هـ قائمة، كان الخطان متحاذيين. وإن لم تكن قائمة، فنخرج ح هـ عموداً على هـ ر. فيكون ح هـ ط ، جـ ر د متحاذيين وخطا ب هـ أ ، ط ح متقاطعان. والبعد بين هـ ح ، هـ أ يزداد إلى مالا نهاية له. والبعد بين هـ ح ، جـ ر واحد إلى مالا نهاية له، لا يزيد ولا ينقص. فيوشك أن يصير البعد بين هـ أ ، هـ ح أعظم من هـ ر، الذى هو بعد المتحاذيين. فخط هـ أ يقطع جـ ر ، وقد فرضناهما متوازيين، وهذا محال. فزاوية أ هـ ر ليست بأعظم من قائمة ولا أصغر منها، فهى قائمة. فخطا أ ب، جـ د متحاذيان إذن. وهو المطلوب إثباته.

الشكل السابع :

إذا وقع خط مستقيم على خطين متوازيين، فإن الزاويتين المتبادلتين متساويتان، والزاوية الخارجة مثل الداخلة والزاويتان الداخلتان مثل قائمتين، ومثاله: خطا أ ب ، جـ د متوازيان، وقد وقع عليهما خط ك ر هـ ل. فإن زاويتى ل ر د ، أ هـ ر المتبادلتين متساويتان، وزاويتى أ هـ ر ، جـ ر هـ الداخلتين مثل قائمتين، وزاوية جـ ر ك الخارجة مثل زاوية أ هـ ر الداخلة.

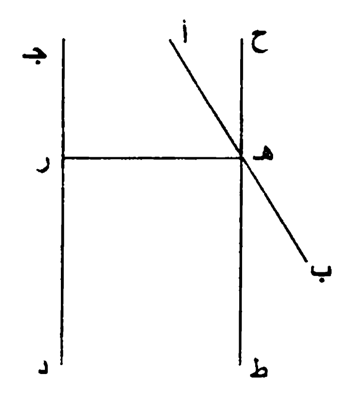


البرهان :

نخرج من نقطة هـ عمود هـ ط على جـ د، فهو عمود على أ ب لأنهما متحاذيان. ونخرج من ر عموداً على أ ب وهو ر ح؛ فسطح هـ ط ر ح قائم الزوايا، فالخطوط المتقابلة منه متساوية. فتكون زاوية ح هـ ر مثل هـ ر ط، وهما متبادلتان، هـ ر ط مثل جـ ر ك، فـ جـ ر ك مثل أ هـ ر، الداخلة مثل الخارجة، هـ ر ط مع هـ ر جـ مثل القائمتين. فزاوية أ هـ ر مع هـ ر جـ مثل قائمتين. وهو المطلوب إثباته.

الشكل الثامن :

خط هـ ر مستقيم، وقد خرج عنه خطا هـ أ ، ر جـ. وزاويتا أ هـ ر ، جـ ر هـ أقل من قائمتين؛ فإنهما يلتقيان فى جهة أ.



البرهان :

نخرج الخطين على استقامة، فتكون زاوية أ هـ ر أصغر من زاوية هـ ر د فنجعل زاوية ح هـ ر مثل هـ ر د. فخطا ح هـ ط، جـ ر د متوازيان؛ وخط هـ قطع ح ط؛ فهو يقطع جـ د فى جهة أ. وهو المطلوب إثباته.

وهكذا برهن الخيام على المصادرة الخامسة لإقليدس ذلك البرهان الذى ساهم فى تطور الهندسة الحديثة، فقد افترض الخيام فروضاً ثلاثة للبرهنة على أنه إذا كانت زاويتان فى مستطيل متساوى الأضلاع تساوى كل منهما زاوية قائمة، فإن الزاويتين الأخرتين تساوى كل منهما زاوية قائمة، ويستحيل أن تكون حادة أو منفرجة، وأقام الخيام البرهان على تلك الاستحالة الحادة والمنفرجة، وانتهى إلى أنه لا يبقى إلا أن تكونا زاويتين قائمتين.

ويُعد الخيّام أول من استعمل هذه الفروض الثلاثة (الزاويتان حادتان – منفرجتان – قائمتان) ومما لاشك فيه أن هذه الفروض تلعب دوراً مهماً فى الهندسات اللاإقليديسية الحديثة، الأمر الذى جعل أحد علماء الرياضيات الغربيين وهو ساكيرى (1667- 1733) ينتحلها فى نظريته عن الخطوط المستقيمة وينسبها له مؤرخو الرياضيات الغربيون، إلا أن مؤلفات عمر الخيام تثبت بما لا يدع مجالاً للشك أنه أول من أبدعها واستعملها فى تاريخ الرياضيات.

الفصل الثامن

نصير الدين الطوسى

نصير الدين الطوسى

(597هـ - 672هـ / 1201م - 1274م)

محمد بن الحسن أبو جعفر نصير الدين الطوسى، ولد فى طوس، ونشأ بها حتى سن الخامسة عشر، ثم انتقل إلى نيسابور متعلماً لعدة سنوات انتهت بسقوط نيسابور فى أيدى المغول سنة 625هـ / 1228م، فعاد الطوسى إلى طوس، ومنها إلى بغداد ودرس فيها على كمال الدين بن يونس من علماء بغداد عصرئذ. أجاد الطوسى اللغات الفارسية واللاتينية والتركية، وأبدع فى الرياضيات والفلك، وأسند إليه المعتصم آخر خلفاء العباسيين (597هـ - 1201م) المرصد الفلكى فى مراغة الذى اشتهر بآلاته الفلكية الدقيقة وأرصاده الضابطة.

ألف الطوسى ما يقرب من 145 مؤلفا فى الجبر وعلم حساب المثلثات والفلك والطبيعة والجغرافيا، منها فى الرياضيات: رسالة فى المثلثات الكروية، رسالة فى المثلثات المستوية، الرسالة الشافية عن الشك فى الخطوط المتوازية، رسالة فى الموضوعة الخامسة، كتاب المعطيات لإقليدس، كتاب أرشميدس فى تكسير الدائرة، كتاب جامع فى الحساب، كتاب الجبر والمقابلة، كتاب قواعد الهندسة، كتاب مساحة الأشكال البسيطة والكروية، كتاب أشكال القطاعات، كتاب الأصول، مقالة تحتوى على النسب، مقالة القطاع الكروى، مقالة برهن فيها أن مجموع مربعى عددين فرديين لا يمكن أن يكون مربعاً كاملاً، مقالة فى قياس الدوائر العظمى.

ويرجع الفضل للطوسى فى ابتكار وتعريف الأعـداد الـصم، وهـى الأعداد التى ليس لها جذر، والتى لا تزال تشغل أهميتهـا فـى الرياضـيات الحديثة، اتضح ذلك من بحوثه لمعادلات صماء مثل:

$$\sqrt{\text{أ ب}} = \sqrt{\text{أ}}\,\sqrt{\text{ب}} \quad \text{و} \quad \sqrt{\text{أ}^2\,\text{ب}^2} = \text{أ ب}$$

ويعد الطوسى أول من فصل علم حساب المثلثات عـن علـم الفلـك ووضع أول كتاب فى حساب المثلثات سنة 648هـ / 1250م وهـو كتـاب "أشكال القطاعات" الذى دوّن فيه أول تطوير لنظرية جيب الزاوية إلى ما هى عليه الآن، وذلك باستعماله المثلث المستوى هكذا:

$$\frac{\text{ب جـ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{جا جـ}}$$

أ
ب جـ

ويتكون كتاب أشكال القطاعات من خمس مقالات، تـشتمل المقالـة الأولى على النسب، وتحتوى الثانية على شكل القطاع السطحى، والثالثة تبحث فى القطاع الكروى، والرابعة فى القطاع الكروى والنـسب الواقعـة عليـه، وجاءت المقالة الخامسة بمعرفة أقواس الدوائر العظمى على سطح الكرة.

ويعد هذا الكتاب أول كتاب من نوعه على مستوى العالم يفصل علـم المثلثات عن علم الفلك، واعتُمد مرجعاً رئيساً لكل علماء الغرب الباحثين فـى علم المثلثات الكروية والمستوية بعد ترجمتـه إلـى اللاتينيـة والإنجليزيـة والفرنسية، فدرسوه وأفادوا به إلى درجة أن بعضهم انتحل كثيراً من نظرياته ونسبها لنفسه، فالناظر فى كتاب ريجيو مونتانوس "علم حساب المثلثات" يدرك

لأول وهلة أن كثيراً من نظرياته وأفكاره موجودة بنصها فى كتاب نصير الدين الطوسى "أشكال القطاعات"!.

وأظهر الطوسى براعة فائقة وخارقة للعادة – على حد قول سارتون – فى معالجة قضية المتوازيات فى الهندسة، حيث امتازت بحوثه على غيرها فى الهندسة بفضل إلمامه بأسس الهندسة المستوية المتعلقة بالمتوازيات. ومن المسائل التى برهنها فيها دائرة تمس أخرى من الداخل قطرها ضعف الأولى تتحركان بانتظام فى اتجاهين متضادين بحيث تكونان دائماً متماستين، وسرعة الدائرة الصغيرة ضعف سرعة الدائرة الكبرى. كما برهن الطوسى على أن نقطة تماس الدائرة الصغرى تتحرك على قطر الدائرة الكبرى. وتعد هذه النظرية التى وضعها نصير الدين الطوسى أساس عمل الاسطرلاب.

ولأول مرة فى تاريخ الرياضيات استطاع الطوسى دراسة المثلث الكروى قائم الزاوية وإيجاد المتطابقات المثلثية التالية :

جتا $\overline{\text{جـ}}$ = جتا $\overline{\text{أ}}$ جتا $\overline{\text{ب}}$ ظتا أ = ظا $\overline{\text{ب}}$ جتا $\overline{\text{جـ}}$

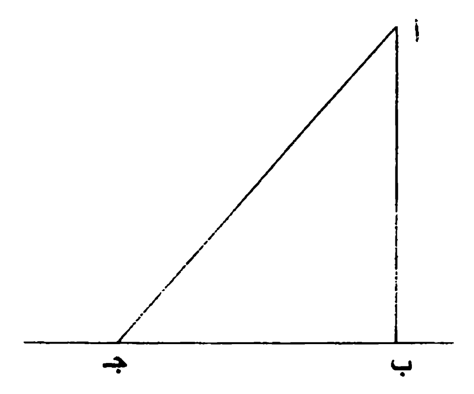
جتا $\overline{\text{جـ}}$ = ظتا أ ظتا ب   جا $\overline{\text{ب}}$ = جا $\overline{\text{جـ}}$ جا ب

جتا أ = جتا $\overline{\text{أ}}$ جا ب   جا $\overline{\text{ب}}$ = ظا $\overline{\text{أ}}$ ظتا أ

ومن أهم ما قدمه الطوسى للإنسانية جمعاء اهتمامه بالهندسة اللاإقليديسية (الفوقية) (الهندلولية) التى تلعب دوراً مهماً حالياً فى تفسيرات النظرية النسبية، ودراسة الفضاء، فقد برهن الطوسى، بكل جدارة – تبعاً لدرك ستريك – على المصادرة الخامسة من مصادرات إقليدس، ذلك البرهان

الذى بدأ به عصر جديد فى علوم الرياضيات الحديثة، ويتألف من سبع قضايا أساسية هى كما يلى[1]:

الأولى: أقصر الخطوط الخارجة من نقطة مفروضة إلى خط غيـر محـدود ليست هى عليه، وهو المسمى ببعدها عنه، هو الذى يكون عمـوداً عليه.

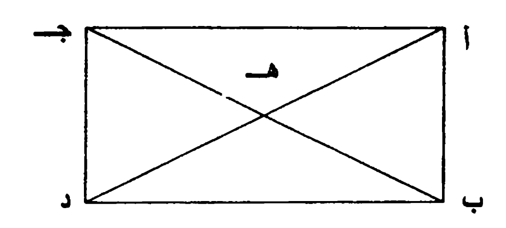


فلتكن النقطة أ والخط ب جـ، والعمود الخارج منها إليه أ ب وذلـك لأنا إذا أخرجنا منها إليه خطاً آخر كـ أ جـ، كانت زاوية أ جـ ب الحـادة أصغر من زاوية أ ب جـ القائمة، فيكون أ ب أقصر من أ جـ، وكذلك فـى غيره.

الثانية : إذا قام عمودان متساويان على خط، ووصل طرفاهما بخـط آخـر، كانت الزاويتان بينهما متساويتان.

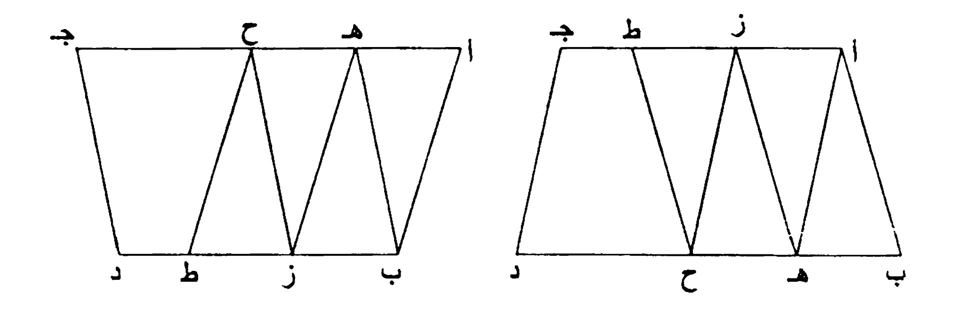
---

(1) عبد الحميد صبره، برهان نصير الدين الطوسى على مصادرة إقليدس الخامسة، مجلة كلية الآداب، جامعة الإسكندرية، المجلد الثالث عشر، جامعة الإسكندرية 1959، ص150 وبعدها.



مثلاً إذا قام عمودا أ ب ، جـ د المتساويان على ب د ، ووصل أ جـ ، فحدثت بينهما زاويتا ب أ جـ، د أ جـ، فهما متساويان، ونصل أ د ، ب جـ متقاطعين على هـ. فيكون فى مثلثى أ ب د ، جـ د ب ضلعاً أ ب ، ب د ؛ وزاوية أ ب د القائمة مساوية لضلعى جـ د ، جـ ب؛ وزاوية جـ د ب القائمة، كل لنظيره. ويقتضى ذلك تساوى باقى الزوايا والأضلاع النظائر؛ ولتساوى زاويتى أ د ب ، جـ ب د يكون ب هـ، د هـ متساويين، ويبقى أ هـ، جـ هـ متساويين، فتكون زاويتا هـ أ جـ، هـ جـ أ متساويتين، وكانت زاويتا د أ ب، ب جـ د متساويتين، فيكون جميع زاوية ب أ جـ مساوية لجميع زاوية د جـ أ.

الثالثة : إذا قام عمودان متساويان على خط ووصل طرفاهما بخط، كانت الزاويتان الحادثتان بينهما قائمتين.



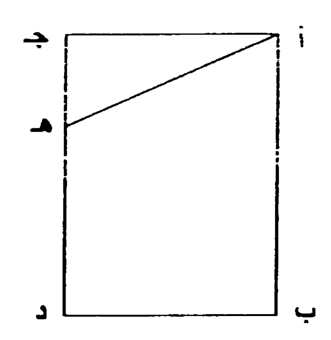
ولنعد عمودى أ ب، جـ د على خط ب د، ونصل أ جـ؛ فإن زاويتى ب أ جـ، جـ د أ المتساويتين قائمتان. وإلا لكانتا إما منفرجتين أو حادتين. فليكونا أولاً منفرجتين. ونخرج من أ العمود أ هـ على الخط أ جـ، فيقع لا محالة فيما بين خطى أ ب، جـ د، وتكون االزاوية أ هـ د الخارجة من المثلث أ ب هـ أعظم من الزاوية أ ب هـ القائمة؛ فتكون أيضاً منفرجة. ثم نخرج من نقطة هـ العمود هـ ز على الخط هـ د، ويقع فيما بين خطى أ هـ، جـ د؛ وتكون الزاوية هـ ز جـ أيضاً منفرجة.

ثم نخرج من ز العمود ح ط على ح د، وهكذا إلى غير النهاية، فتكون الأعمدة الخارجة من النقط أ، ز، ط من الخط أ جـ على الخط ب د؛ أعنى الأعمدة أ ب، ز هـ، ط ح، متزايدة الأطوال على الولاء. وأقصرها العمود أ ب، لأنه يوتر الزاوية أ هـ ب الحادة؛ فهو أقصر من أ هـ الموتر للقائمة، أ هـ الموتر للزاوية أ ز هـ الحادة أقصر من ز هـ الموتر للقائمة. فـ أ ب أقصر من أ هـ، أ هـ من ز هـ؛ وكذلك ز هـ من ط ح، وعلى هذا الترتيب. ويظهر من ذلك أن أبعاد النقط التى هى مخارج الأعمدة الخارجة من خط أ جـ على خط ب د، عن خط ب د متزايدة الأطوال فى جهة جـ، فإذن خط أ جـ موضوع على التباعد عن خط ب د فى جهة جـ، وعلى التقارب فى جهة أ. ولكون زاوية د جـ أ أيضاً منفرجة تبين بمثل هذا التدبير أن خط أ جـ بعينه موضوعاً على التباعد من خط ب د بعينه فى جهة أ التى كان فيها بعينها موضوعاً على التقارب منه. فإذن هو متباعد متقارب معاً من خط واحد فى جهة واحدة من غير تلاق؛ وهذا خلف.

ثم ليكونا حادتين: ونقيم الأعمدة المتوالية، إلا أنا نبتدئ بإخراج العمود من النقطة ب على خط أ جـ؛ فيقع فيما بين خطى أ ب، جـ د، لكون زاوية أ

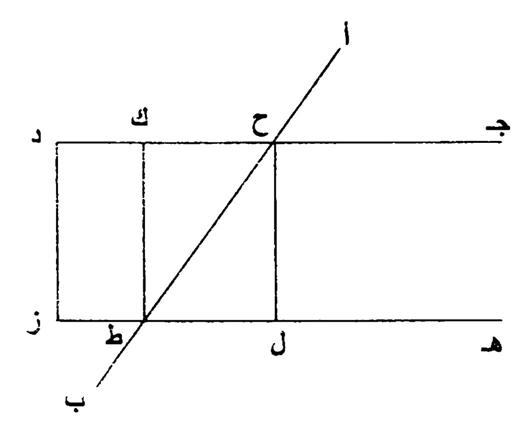
حادة، إذ لو وقع خارجاً عنهما لاجتمع فى مثلث قائمة ومنفرجة، وهكذا إلى أن نخرج الأعمدة أ ب، هــ ز، ح ط المتناقصة الأطوال على الولاء. ثم نبــين بمثل ما مر أن الخط أ جـ موضوع على التقارب من الخط ب د فــى جهــة جـ، وعلى التباعد عنه فى جهة أ. ونبين باستــئناف العمــل والتــدبير أنــه موضوع على التباعد عنه فى الجهة التى كان موضوعاً فيها على التقارب منه بعينه، وهذا خلف. فإذن ثبت أن زاويتى ب أ جـ، د جـ أ قائمتان.

الرابعة: كل ضلعين متقابلين من سطح ذى أربعــة أضــلاع قــائم الزوايــا متساويان.



كضلعى أ ب، جـ د من سطح أ ب جـ د القائم الزوايا. وإلا فلــيكن جـ د أطول؛ ونفصل د هـ مثل أ ب؛ ونصل أ هـ؛ فتكون زاويتا ب أ هـ، د هـ أ قائمتين لحدوثهما بين عمودى أ ب، هـ د المتساويين القائمين على ب د؛ وقد كانت زاويتا ب أ جـ، د جـ أ قائمتين، فالكل كــالجزء؛ والخارجــة كالداخلة، وكلاهما خلف، فإذن الحكم ثابت.

الخامسة: كل خط يقع على عمودين قائمين على خط، فإنه يصيّر المتبادلتين متساويتين، والخارجة مساوية لمقابلتها الداخلة، والداخلتين فــى جهة معادلتين لقائمتين.

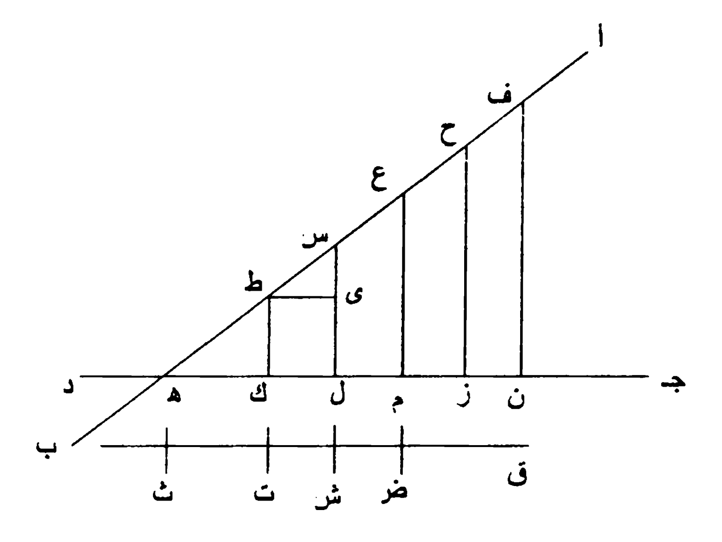


مثلاً وقع أ ب على عمودى جـ د، هـ ز القائمين على د ز وقطعهما على ح، ط. فإن متبادلتى د ح ط، هـ ط ح متساويتان؛ وكذلك خارجة أ ح جـ وداخلة أ ط هـ؛ وإن داخلتى جـ ح ط، هـ ط ح معادلتان لقائمتين، وذلك لأن ط ز إن كان مساوياً لـ ح د كانت جميع زواياه المحيطة بنقطتى ح، ط قوائم؛ وثبت الحكم، وإلا فليكن ح د أطول. ونفصل د ك مثل ز ط، ونصل ط ك؛ ونفصل ط ل أيضاً مثل ح ك، ونصل ح ل؛ فيكون سطح ح ل ط ك قائم الزوايا.

ويكون فى مثلثى ح ل ط، ح ط ك ضلعا ح ل، ل ط، وزاوية ل مساوية لضلعى ط ك، ك ح، وزاوية ك؛ فتكون زاويتا ك ح ط، ح ط ل النظيرتان متساويتين، وهما المتبادلتان. ولكون زاوية ط ح ك مساوية لزاوية أ ح جـ، تكون زاويتا أ ح جـ، ح ط هـ متساويتين، وهما الخارجة والداخلة.

ولكون زاوية جـ ح ط مع زاوية أ ح جـ معادلة لقائمتين، فهى مع زاوية ح ط هـ أيضاً معادلة لقائمتين، وهما الداخلتان؛ وهو المطلوب إثباته.

السادسة: إذا تقاطع خطان غير محدودين على غير قوائم، وقام على أحدهما عمود؛ فإنه إن أخرج قاطع الآخر فى جهة الحادة.



فليتقاطع أ ب، جـ د على هـ؛ ولتكن زاوية أ هـ جـ التى تلى أ حادة، وجارتها التى تلى ب منفرجة؛ وليقم على جـ د عمود ز ح. فإنه إن أخرج، قاطع أ ب فى جهة أ. فلنعين على أ هـ نقطة ط، ونخرج عمود ك ط على جـ د؛ فلا يخلو إما أن يقع فيما بين نقطتى هـ، ز أو على نقطة ز منطبقاً على ح ز، أو خارجاً عن هـ ز.

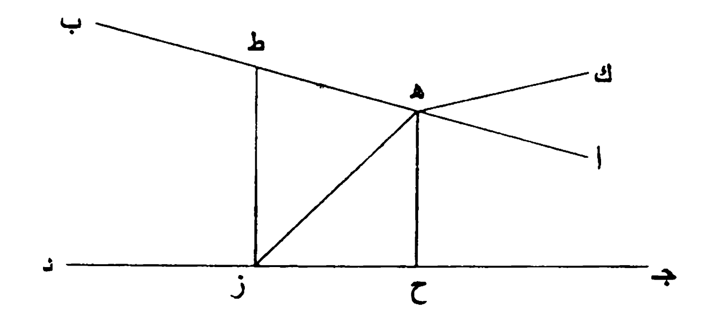
فإن وقع فيما بين ز، هـ فلنفرض خطا ونأخذ منه أمثالاً لـ هـ ك على الولاء يزيد جميعها على هـ ز، وهى ق ض، ض ش، ش ت، ت ث؛ ونفصل من هـ أ أمثالاً لـ هـ ط بتلك العدة. وهى هـ ط، ط س، س ع، ع ف.

ونخرج من نقط س، ع، ف أعمدة س ل، ع م، ف ن، على جـ د؛ ومن ط عمود ط ى على س ل. فيكون فى مثلثى هـ ط ك، ط ى س زاويتا هـ ط ك، هـ س ى الداخلة والخارجة متساويتين. وكذلك زاويتا هـ ك ط، ط ى س القائمتان؛ وضلعا هـ ط، ط س؛ فيكون ى ط المساوى لـ ل ك لكونهما متقابلين فى سطح ط ى ل ك القائم الزوايا مساوياً لـ هـ ك.

وبمثل ذلك نبين أن كل واحد من ل م، م ن مساو لـ هـ ك. فجميع أقسام هـ ن متساوية، ومساوية لأقسام ق ث، وبتلك العدة فـ هـ ن، ق ث متساويان، ق ث أطول من هـ ز؛ فـ هـ ن أطول من هـ ز؛ فعمود ف ن قد وقع خارجاً عما بين نقطتى هـ، ز وصار ح ز داخل مثلث ف ن هـ. فإذن إذا أخرج عمود ح ز الموازى لعمود ف ن إلى أن يخرج من المثلث، قاطع أ ب لا محالة فى جهة ح، وهى التى تلى الحادّة.

وأما إن وقع عمود ط ك على نقطة ز منطبقاً على عمود ح ز، أو خارجاً عما بين ز، هـ، كان ثبوت الحكم أظهر، فإذن الحكم ثابت.

السابعة: كل خطين وقع عليهما خط، وكانت الداخلتان فى جهة أصغر من قائمتين، فإنهما إن أخرجا فى تلك الجهة تلاقيا.



فليكن أ ب، جـ د خطين وقع عليهما خط هـ ز، وكانت أ هـ، جـ ز هـ داخلتين معاً أصغر من قائمتين. فإنهما يتلاقيان فى جهة أ، جـ إن أخرجا ؛ وذلك لأنه إما أن تكون إحدى هاتين الزاويتين قائمة أو منفرجة، أو لا تكون كذلك، بل تكونان حادتين. فإن كانت إحداهما قائمة، كانت الأخرى حادة ويلتقيان فى جهة الحادة كما مرّ.

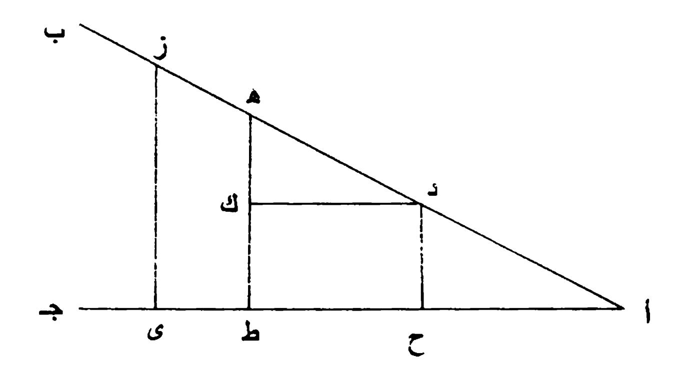
وإن كانت إحداهما منفرجة، وليكن هـ زاوية أ هـ ز، فلنخرج من هـ عمود هـ ح على أ ب، ومن ز عمود ز ط أيضاً على أ ب. فيكون لوقوع هـ ز على عمودى هـ ح، ط ز متبادلان ح هـ ز، هـ ز ط متساويتين. ولما كانت زاويتا أ هـ ز، هـ ز ح أصغر من قائمتين، وكانت زاوية أ هـ ح قائمة، يبقى زاويتا ح هـ ز، هـ ز ح معاً. يعنى زاوية هـ ز ط، هـ ز ح، بل زاوية ط ز ح أقل من قائمة، وكانت زاوية أ ط ز قائمة، فإذن الخطان يتلاقيان فى جهة أ، جـ.

وإن كانتا حادتين، فلنخرج من هـ عمود هـ ح على جـ د، ومن ز عمود ز ط أيضاً على جـ د. وإذا ألقينا زاويتى جـ ز هـ، ز هـ ح معاً. يعنى زاويتى ج ز هـ، هـ ز ط معاً المساويتين لزاوية جـ ز ط القائمة من زاويتى أ هـ ز، جـ ز هـ، بقيت زاوية أ هـ ح أصغر من قائمة، وكانت جـ ح هـ قائمة، وإذن هما يتلاقيان فى جهة أ، جـ.

ولهذه القضية الأخيرة وجه آخر: وهو أن نخرج من هـ عمود هـ ك على خط هـ ز، فتكون زاوية ك هـ ز قائمة، وزاوية هـ ز جـ حادة، فيتلاقى خطا هـ ك، ز جـ، ويتلاقى هـ أ، ز جـ لا محالة إن أخرج فى جهة جـ.

ولبيان هذه القضية وجه آخر يتم بثمانى قضايا، خمس منها هى هذه التى مرت من الأولى إلى الخامسة، وثلاث هى هذه:

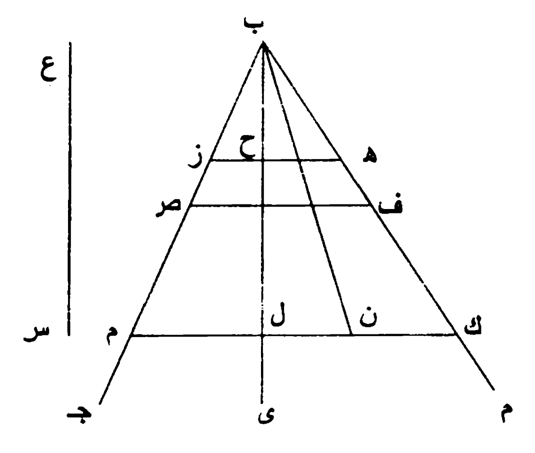
السادسة: كل زاوية حادة فصل من أحد ضلعيها خطوط متساوية على الولاء، وأخرج من تلك المفاصل أعمدة على الضلع الآخر، فالخطوط التى تفصلها مواقع الأعمدة من ذلك الضلع متساوية أيضاً.



فلتكن الزاوية ب أ جـ، وقد فصل من أ ب خطوط أ د، د هـ، هـ ز متساوية، وأخرج من د، هـ، ز أعمدة د ح، هـ ط، ز ى على خط أ جـ. فإن خطوط أ ح، ح ط، ط ى المفصولة بها أيضاً متساوية. فلنعمل على د من خط هـ د زاوية هـ د ك مثل زاوية أ، ونخرجه إلى ك، فيكون فى مثلثى أ ح د، د ك هـ زاويتا ح أ د، ك د هـ متساويتين.

وكذلك زاويتا أ د ح، د هـ ك الخارجة والداخلة، وكذلك ضلعا أ د، د هـ، فـ أ ح مساو لـ د ك، وزاوية أ ح د القائمة مساوية لزاوية د ك هـ، فيكون سطح د ك ط ح قائم الزوايا، د ك منه يساوى ح ط، يعنى أ ح، وبمثل ذلك نبين أن ط ى أيضاً مساو لـ أ ح.

السابعة: كل زاوية فرضت نقطة فيما خطيها، فإنه يمكن أن يوصل بينهما بخط مستقيم يمر بتلك النقطة.



فلنفرض نقطة د بين خطى أ ب، ب جـ المحيطين بزاوية أ ب جـ، وندير على مركز ب وببعد ب د قوس هـ د ز المار بنقطة د، ونصل وتر هـ ز، وننصف زاوية هـ ب ز بخط ب ح إلى حادثين. فيكون فى مثلثى هـ ب ح، ز ب ح ضلعا هـ ب، ب ح وزاوية هـ ب ح مساوية لضلعى ز ب، ب ح، وزاوية ز ب ح، فتكون زاويتا ب ح هـ، ب ح ز متساويتين، بل قائمتين.

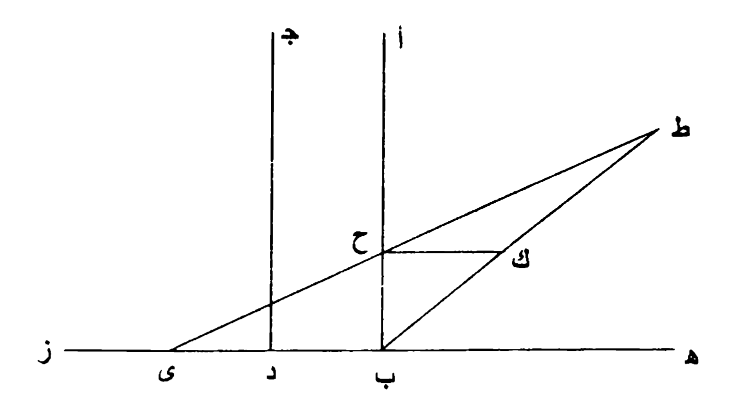
ونخرج ب ح إلى ى، فيقطع قوس هـ د ز على ط، ونأخذ لـ ب ح أضعافاً يزيد مجموعها على ب ط، ولتكن تلك الأضعاف خط ع س، ونفصل من ضلع ب أ أمثالاً لـ ب هـ. ويكون عدتها عدة تلك الأضعاف، وهى ب هـ، هـ ك. ونخرج من أطراف تلك الخطوط، وهى هـ، ك أعمدة هـ ح، ك ل على ب ى، فينفصل منه ب ح، ح ل متساويين، ويكون مجموعهما المساوى لـ ع س أطول من ب ط، فيكون موقع عمود ك ل على ب ى، وهو نقطة ل، خارجاً عن ب ط.

ونفصل من ب جـ، ب م مثل ب ك، ونصل م ل، فيكون فى مثلثى ب ك ل، ب م ل ضلعا ك ب، ب ل وزاوية ك ب ل مساوية لضلعى م ب،

ب ل وزاوية م ب ل. فتتساوى زاويتا ب ل ك، ب ل م، ب ل ك قائمة، فـــــ ب ل م قائمة، ك ل م خط مستقيم. ونصل د ب ونخرجه إلى ن، ونعمل على نقطة د من خط ن د زاوية ن د ف مثل زاوية د ن ل، فيكون خطا ف د، ك م متوازيين، لتساوى متبادلتيهما. ونخرج ف د حتى يخرج من مثلـــث ب ك م على نقطتى ف، ص فيكون خط ف د ص، هو الموصول بين ضلعى أ ب، ب جـ المار بنقطة د.

الثامنة وهى لإثبات القضية:

وليكن الخطان أ ب، جـ د والواقع عليهما ب د، والداخلتان اللتان هما أصغر من قائمتين هما أ ب د، جـ د ب، ولنخرج ب د فى الجهتين إلى هـ ، ز ونفصل من ب أ ، ب جـ مثل ب د، فزاوية أ ب د مع زاوية جـ د ب أصغر من قائمتين، ومع زاوية أ ب هـ كقائمتين.



يبقى أن زاوية أ ب هـ أعظم من زاوية جـ د ب، فنعمل علـــى ب من ب ح زاوية ح ب ط مثل زاوية جـ د ب، ونصل بين خطى ط ب، ب ز المحيطين بزاوية ب خط ط ح ب ماراً بنقطة ح، فزاوية ط ح ب الخارجة من

مثلث ى ح ب أعظم من زاوية ح ب د، ونعمل على نقطة ح من خـــط ب ح زاوية ب ح ك مثل زاوية أ ب د، ونخرج ح ك إلى أن يقطع ب ط فى ك.

وإذا تقدم ذلك، فإن خطا أ ب، جـــ د يتلاقيان، لأنا لو توهمنا تطبيـــق ب د على ب جـــ المساوى له، انطبق د جـــ على ب ك لتساوى زاويتى ح ب ك، ب د جـــ، و ب أ على ح ك لتساوى زاويتى ب ح ك ، د ب أ فيتلاقيان ضرورة على نقطة ك. وهو المطلوب إثباته.

وهكذا توصل الطوسى وبرهن على أن مجمـــوع زوايـــا أى مثلـــث تساوى قائمتين، وذلك يكافئ المصادرة الخامسة من مصادرات إقليدس، وبذلك يكون الطوسى قد وضع أساس الهندسة اللاإقليديسية الحديثـــة والتـــى تقتـــرن بأسماء علماء غربيين من أمثال: كارل فاوس الألمانى (ت 1855)، ونيكوليا لوباتشوفسكى الروسى (ت 1856)، ودولفقان بولياى المجـــرى (ت 1856)، وبرنهارد ريمان الألمانى (ت 1866)، فهورد إيفز يذكر أن جـــرولا ســـكير الإيطالى (ت 1733) المسمى بأبى الهندسة اللاإقليديسية قد اعتمـــد بـــصورة أساسية على عمل نصير الدين الطوسى فى هذا الميدان من الهندسة. ويدرس جان والس (ت 1703) الرياضياتى الانجليزى الشهير برهان نـــصير الـــدين الطوسى على المصادرة الخامسة لإقليدس، ويخرج من دراسته معترفاً بفضل نصير الدين الطوسى فى وضع الهندسة اللاإقليديسية وظهور فجر الرياضيات الحديثة.

الفصل التاسع

ابن البنّـاء المراكشى

ابن البنّاء المراكشي

(654 - 731هـ / 1256 - 1321م)

•

أبو العباس أحمد بن محمد عثمان الأزدى بن البنّاء نسبة إلى أبيه الذى كان يعمل بحرفة البناء، والمراكشى نسبة إلى مدينة مراكش التى ولد بها وتعلم فيها على مشاهير العلماء حتى أجاد الفقه والنحو، ثم انتقل إلى مدينة فاس طالباً للرياضيات والفلك والطب، وقطع شوطاً كبيراً فى الطلب حتى أجاد ونبغ خاصة فى الرياضيات التى لقب مع تفوقه فيها "بالعددى" وصار استاذاً مرموقاً يأتى إليه طلاب العلم من كل حدب وصوب للتتلمذ عليه، وكان من أشهرهم عبد الرحمن بن خلدون.

ألف ابن البنّاء ما يربو على سبعين كتاباً ورسالة معظمها فى الحساب والهندسة والعدد والجبر والفلك، إلا أن أكثرها ضاع، وبقى منها عدد قليل يكشف عن نظريات ابن البنّاء الرياضياتية وما أسداه من تطور للحساب والعدد امتد إلى العصر الحديث، ومن أهم هذه المؤلفات: تلخيص أعمال الحساب، التمهيد والتيسير فى قواعد التكسير، رسالة بالتناسب، رسالة فى تحقيق رؤية الأهلة، رسالة فى الجذور الصم جمعها وطرحها، رسالة فى العدد التام والناقص، رسالة فى علم الحساب، رسالة فى علم المساحة، رسالة فى علم الجداول، رسالة فى كروية الأرض، رسالة فى الأنواء، كتاب الأصول والمقدمات فى الجبر والمقابلة، كتاب أحكام النجوم، كتاب الاسطرلاب واستعماله، كتاب تحديد القبلة، كتاب تنبيه الألباب، كتاب الجبر والمقابلة، كتاب رفع الحجاب عن علم الحساب، كتاب القانون لترحيل الشمس والقمر فى

المنازل ومعرفة أوقات الليل والنهار، كتاب مدخل النجوم وطبائع الحــروف، كتاب المناخ، مقدمة أُقليدس، المقالات فى الحساب.

ارتبطت شهرة ابن البناء المراكشى بكتابه تلخيص أعمــال الحــساب الذى قسمه إلى قسمين، يبحث الأول فى العدد المعلوم ومراتبه وجمعه وطرحه وضربه وقسمته، وجمع الكسور وطرحها وقسمتها، وجمع الجذور وطرحهــا وضربها وقسمتها. ويتناول فى القسم الثانى الجبر والمقابلة والنسبة.

ومن مسائل الكتاب الرئيسة التى شغلت اهتمام ابن البناء كيفية إيجــاد القيمة التقريبية للجذر الأصم[1]، فابتكر صيغة للعدد الأصم يمكن بمقتــضاها الوصول إلى القيمة التقريبية لجذر العدد الأصم، وهذه الصيغة هى: $\sqrt{أ^2 + ب}$ وأعطى مثالاً لذلك بإيجا القيمة التقريبية لجذر العدد الأصم (13) هكذا:

$$\sqrt{أ^2 + ب} = \sqrt{13} = \sqrt{9 + 4}$$

إذن أ = 3 ، ب = 4

ولذلك فإن

$$أ + \frac{ب}{2ب + 1} = 3 + \frac{4}{2(4) + 1} = 3 + \frac{4}{9} = 3\frac{4}{9} = 3.44.$$

وتلك هى القيمة التقريبية لجذر العدد الأصم (13).

وفى رسالته فى الأعداد التامة والناقصة والزائدة والمتحابة اهتم ابــن البناء اهتماماً كبيراً بهذه الأعداد، ومع أنه سلك مسلك ثابت بن قرة فيما يخص

(1) ابن البنّاء المراكشى، تلخيص أعمال الحساب، مخطوط مكتبة المخطوطات التونــسية، رقم 307 ر.

الأعداد المتحابة، إلا أنه بحث بحثاً جديداً مبتكراً فى التامة والناقصة والزائدة من الأعداد، عمل على تطور علم الحساب والعدد فى العصور اللاحقة وامتد إلى العصر الحديث. ويمكن الوقوف على ذلك بشىء من الاختصار فيما يلى[1]:

الأعداد التامة :

إذا كان ن = 2 ، فإن $2^2 - 1 = 3$ عدد أولى ← $2 (2^2 - 1) = 6$ عدد تام

إذا كان ن = 3 ، فإن $2^3 - 1 = 7$ عدد أولى ← $2^2 (2^3 - 1) =$ 28 عدد تام.

إذا كان ن = 4 ، فإن $2^4 - 1 = 15$ عدد غير أولى ← $2^3 (2^4 - 1) = 120$ عدد غير تام.

إذا كان ن = 5 ، فإن $2^5 - 1 = 31$ عدد أولى ← $2^4 (2^5 - 1) = 496$ عدد تام.

الأعداد الزائدة :

12 أجزاؤه : 6، 4، 3، 2، 1 ← $6 + 4 + 3 + 2 + 1 = 16$، إذن 12 عدد زائد.

20 أجزاؤه : 10، 5، 4، 2، 1 ← $10 + 5 + 4 + 2 + 1 =$

---

(1) ابن البناء المراكشى، رسالة فى الأعداد التامة والزائدة والناقصة والمتحابة، تحقيق محمد سويسى، مجلة الجامعة التونسية، العدد 13، 1976.

22، إذن 20 عدد زائد.

24 أجزاؤه : 12، 8، 6، 4، 3، 2، 1 ← 12 + 8 + 6 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36، إذن 24 عدد زائد.

الأعداد الناقصة :

44 أجــزاؤه : 12، 11، 4، 2، 1 ← 12 + 11 + 4 + 2 + 1 = 30، إذن 44 عدد ناقص.

إن أهمية العالم إنما تقاس بما قدمه من تطوير لعلمه الذى يبحث فيه، وقد قدم ابن البنّاء من الأفكار والنظريات الرياضياتية المبتكرة ما أدت إلى تطوير وتقدم علم الرياضيات فى الحضارة الإسلامية وفى العصور اللاحقة، يدلنا على ذلك أن كتاب تلخيص أعمال الحسابي لابن البنّاء نال اهتمام علماء الرياضيات فى العصور اللاحقة له، فدرسوه، ولخصوه وشرحوه شروحات متعددة، منها: شرح عبد العزيز الهرازى أحد تلاميذ ابن البناء، وشرح ابن المجدى فى النصف الثانى من القرن الثامن الهجرى / الرابع عشر الميلادى، وشرح ابن زكريا الإشبيلى، وفى القرن التاسع الهجرى / الخامس عشر الميلادى قدم القلصادى شرحين لكتاب تلخيص أعمال الحساب، لخص فى الشرح الصغير منهما بعض أفكار ونظريات ابن البناء الرياضياتية وعرضها فى سهولة تتناسب مع احتياجات الإنسان الحسابية اليومية. أما الشرح الكبير فقد برهن فيه على نظريات ابن البنّاء وحل كثيراً من المسائل الصعبة، وزاد عليه خاتمة تبحث فى الأعداد التامة والزائدة والناقصة. وبقى هذا الشرح من المراجع الرياضياتية الرئيسة على الجانبين، العربى والغربى.

وفى النصف الأخير من القرن التاسع عشر الميلادى ترجم أريستيدمار كتاب تلخيص أعمال الحساب لابن البناء إلى اللغة الفرنسية، وبعد أن درسه دراسة وافية، قرر أن كثيراً ممن النظريات الرياضياتية المنسوبة لعلماء غربيين هى نظريات ابن البناء المراكشى، وهذا ما حدا بديفيد سميث أن يذكر أن كتاب تلخيص أعمال الحساب لابن البناء يشتمل على بحوث كثيرة فى الكسور ونظريات لجمع مربعات الأعداد ومكعباتها وقانون الخطأين لحل المعادلة من الدرجة الأولى. وقدم ابن البناء – بحسب فرانسيس كاجورى – خدمة عظيمة بإيجاده الطرق الرياضياتية البحتة وإيجاده القيم التقريبية لجذور الأعداد الصم، ولذا رأى جورج سارتون أن كتاب تلخيص أعمال الحساب لابن البناء المراكشى يحتوى على نظريات حسابية وجبرية مفيدة، إذ أوضح العويص منها إيضاحاً لم يسبقه إليه أحد، لذا يُعد كتابه من أحسن الكتب التى ظهرت فى علم الحساب.

الفصل العاشر

الكاشى

الكاشى

(ت 839هـ / 1436م)

غياث الدين جمشيد بن مسعود بن محمد الكاشى، ولد فى مدينة قاشان – كاشان ببلاد فارس (إيران حالياً) لأب كان من أكبر علمـــاء الرياضـــيات والفلك فى عصره، فدرس الكاشى النحو والصرف والفقــه علـــى المـــذاهب الأربعة فأتمها حتى أصبح فقيهاً معتبراً، فضلاً عن حفظه القرآن الكريم والذى أشتهر بختمه يومياً، الأمر الذى انعكس على أسلوبه فى الكتابة فيما بعد فجاء سهلاً رزيناً. ثم درس الكاشى المنطق واستفاد به فى دراسة الرياضيات والفلك فأظهر نبوغاً مبكراً فيهما.

عاش الكاشى معظم حياته فى سمرقند، وبنى فيهـــا مرصـــداً عُـــرف بمرصد سمرقند وامتاز بدقة أرصاده. وفى سمرقند وضع الكاشى أكثر مؤلفاته التى أُشتهر بها، وهو يُعد أحد العلماء الثلاثة الذين اشتهروا باهتمامهم بالعلوم الرياضياتية والفلكية، وهم: قاضى زاده، وعلى القوشى، والكاشى هؤلاء الذين اشتغلوا فى مرصد سمرقند وعاونوا أولغ بك فى إجـــراء الأرصـــاد وعمـــل الأزياج، وكان هذا المرصد أحد عجائب زمانه، خاصة وأن أولغ بك قد زوده بالأدوات الكثيرة والآلات الفلكية الدقيقة، وفيه شرح الكاشى كثير من إنتـــاج علماء الفلك الذين عملوا مع نصير الدين الطوسى فى مرصد مراغـــة، كمـــا حقق جداول النجوم التى وضعها الراصدون فى ذلك المرصد، ووضع معظـــم مؤلفاته الفلكية، ومنها: جداول فلكية معروفة باسم الزيج الجرجانى، رسالة فى المجسطى، رسالة سلم السماء، زيج التسهيلات، زيج الخاقانى وهو عبارة عن

تصحيح زيج الايلخانى للطوسى، حيث دقق فيه جداول النجوم التى وضعها الراصدون فى مراغة تحت إشراف نصير الدين الطوسى، وزاد على ذلك من البراهين الرياضياتية والأدلة الفلكية مما لم يوجد فى الأزياج التى عملت قبله، نزهة الحدائق وهو كتاب يبحث فى استعمال الآلة المسماة (طبق المناطق) والتى وضعها لمرصد سمرقند، وبواسطة هذه الآلة يمكن الحصول على تقاويم الكواكب وعرضها وبعدها، مع الخسوف والكسوف وما يتعلق بهما، كتاب فى علم الهيئة، رسالة عمر إهليلجى القمر وعطارد، وهى أهم مؤلفات الكاشى الفلكية حيث درس فيها وتتبع مدارات القمر وعطارد واستطاع أن يكتشف كشفاً فلكياً عُد الأول من نوعه، وهو أن مدارات القمر وكوكب عطارد إهليليجية أى ذات شكل بيضاوى، هذا الكشف الذى ادعاه يوهان كبلر (1571- 1631) ونسبه لنفسه زوراً وافتراءً على صاحبه الكاشى، والذى قدر أيضاً كسوف الشمس تقديراً دقيقاً خلال ثلاث سنوات، بين 809- 811هـ / 1407- 1409م.

أما فى الرياضيات فقد وضع الكاشى مجموعة من المؤلفات أفادت منها الأجيال العلمية اللاحقة، وامتد تأثيرها إلى العصر الحديث، ومن أهمها: الرسالة المحيطية، رسالة فى التضعيف والتصنيف والجمع والتفريق، رسالة الجذور الصم، رسالة الجيب والوتر، رسالة فى الحساب، رسالة فى الهندسة، رسالة فى المساحات، رسالة فى معرفة التداخل والتشارك والتباين، رسالة الوتر والجيب فى استخراجها لثلث القوس المعلوم والوتر والجيب، مفتاح الحساب[1]، مقالة فى الأعداد، مقالة فى الكسور العشرية والاعتيادية، مقالة فى

(1) حققه نادر النابلسى ونشره بدمشق سنة 1977.

استخراج المجهول، مقالة فى طريقة استخراج الضلع الأول من المضلعات كالجذر والكعب.

ويأتى على قمة هذه المؤلفات من حيث الأهمية كتاب الحساب، وضعه الكاشى ليكون مرجعاً فى تدريس الحساب لطلاب العلم، وضمّنه بعض اكتشافاته الرياضياتة. وظل هذا الكتاب منهلاً استقى منه علماء الشرق والغرب، واعتمدوه فى المدارس والجامعات لعدة قرون، كما استخدموا كثيراً من النظريات والقوانين التى ابتكرها وبرهنها ومنها ما يلى:

ابتكر الكاشى الكسور العشرية، فالخلاف بين علماء الرياضيات كبير – على حد قول سميث – ولكن غالبيتهم يتفق على أن الكاشى هو الذى ابتكر الكسر العشرى، ويعترف سميث بأن المسلمين فى عصر الكاشى سبقوا الأوربيين فى استعمال النظام العشرى، وأنهم كانوا على معرفة تامة بالكسور العشرية.

ولا يخفى ما لهذا الابتكار من أثر بالغ فى اختراع الآلات الحاسبة.

ووضع الكاشى قانوناً خاصاً بتحديد قياس أحد أضلاع مثلث انطلاقاً من قياس ضلعيه الآخرين وقياس الزاوية المقابلة له.

وفى كتابه "رسالة المحيطية" بحث الكاشى كيفية تعيين نسبة محيط الدائرة إلى قطرها، وقد أوجد الكاشى تلك النسبة – على حد قول سميث – إلى درجة من التقريب لم يسبقه إليها أحد، وتكاد تعادل النسبة التى استخرجها علماء القرن العشرين بالآلات الحاسبة، فوصلت نسبة الكاشى إلى 16 خانة عشرية، وقيمتها: 3.1415926535898732.

وتوصل الكاشى إلى قانون خاص بمجموع الأعداد الطبيعية أو المتسلسلة العددية المرفوعة إلى القوة الرابعة، وهو قانونن لا يمكن التوصل إليه بقليل من النبوغ على رأى كرادى فو. فقد وصل علماء الحضارة الإسلامية قبل الكاشى إلى قوانين عدة فى مجموع الأعداد الطبيعية المرفوعة إلى القوة الأولى والثانية والثالثة وزاد الكاشى بوضع قانون مجموع الأعداد الطبيعية المرفوعة إلى القوة الرابعة. وهذا القانون تبعاً لديفيد سميث هو:

$$\text{مجموع ن}^4 = \left(\frac{\text{مجموع ب - 1}}{5} + \text{مجموع ب}\right) - \text{مجموع ب}^2$$

$$\text{مجموع ن}^4 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + 000 + \text{ن}^4\text{،}$$

$$\text{مجموع ب}^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 000 + \text{ب}^2\text{،}$$

$$\text{مجموع ب} = 1 + 2 + 3 + 000 + \text{ب.}$$

ومما لاشك فيه أن هذا القانون أدى إلى تطور علم الأعداد تطوراً ممتداً منذ الكاشى وحتى العصر الحديث.

ولقد استطاع الكاشى إيجاد خوارزمية لحساب الجذور النونية لأى عدد والتى عدت حالة خاصة للطرق التى اكتشفت بعد ذلك بقرون فى العصر الحديث بمعرفة "هورنر".

وإذا كان مؤرخو الرياضيات الغربيون ينسبون نظرية "ذات الحدين" لإسحاق نيوتن، أو غيره من الغربيين، فإن منهم من يعترف بأن صاحبها هو الكاشى، ففى كتابه "مصادر الرياضيات خلال 1200- 1800 ميلادية" يقرر دريك سترويك أن الكاشى هو أول من فكر فى طريقة ذات الحدين، ويرجع له الفضل فى تطوير خواص معاملاتها.

فاستخدم الكاشى لإيجاد حدود المعادلة الجبرية قاعدة عمر الخيام، وطورها وجعلها قاعدة عامة لنظرية ذات الحدين لأى أس صحيح مثل:

$$(\text{س} + \text{ص})^4 = \text{س}^4 + 4\,\text{س}^3\,\text{ص} + \frac{4 \times 3}{2}\,\text{س}^2\,\text{ص}^2 + \frac{4 \times 3 \times 2}{2 \times 3}\,\text{س}\,\text{ص}^3 + \text{ص}^4.$$

ولا يغبن عن البال ما لنظرية ذات الحدين من أهمية فى الرياضيات حتى الآن.

الفصل الحادى عشر

القلصادى

القلصادى

(825- 891 هـ / 1426- 1492م)

أبو الحسن على بن محمد القرشى البسطى الملقب بالقلصادى، ولد ونشأ بمدينة بسطة فى الأندلس، وطلب العلم فى شبابه بها متتلمذاً على كبار علمائها، ثم انتقل إلى غرناطة زيادة فى العلم، وظل دارساً بها حتى تتخرج وصار فقيهاً من فقهاء المالكية وعالماً فى الرياضيات. وقد عاصر القلصادى السنوات الأخيرة لغرناطة قبل سقوطها، وشارك فى المقاومة ضد الصليبيين، ثم غادر إلى شمال أفريقيا، واشتغل بالعلم هناك إلى أن توفى قبل سقوط غرناطة من المسلمين بست سنوات.

ألف القلصادى ما يقترب من العشرين كتابا فى الإسلام وفرائضه والفقه والمنطق، إلا أن معظم مؤلفاته تركزت فى الرياضيات وخاصة الحساب والجبر، وهى: الواضحة فى مسائل الأعداد اللائحة، رسالة فى قانون الحساب، رسالة فى معانى الكسور، شرح الإرجوزة الياسيمنية فى الجبر والمقابلة، شرح إيساغوجى فى المنطق، شرح تلخيص ابن البناء، شرح ذوات الأسماء، كتاب أشرف المسالك إلى مذهب مالك، كتاب بغية المبتدئ وغنية المنتهى، كتاب تبصرة فى حساب الغبار، كتاب تقريب الموارث ومنتهى العقول البواحث، الكتاب الضرورى فى علم المواريث، كتاب كشف الجلباب عن علم الحساب، كتاب النصيحة فى السياسة العامة والخاصة، كتاب هداية الإمام فى مختصر قواعد الإسلام، كشف الأسرار فى الجبر، كشف الأسرار عن علم الغبار، وهو أهم مؤلفات القلصادى الرياضياتية، وبه ارتبطت شهرته، ضمنه اكتشافاته وابتكاراته التى لا تزال معروفة ومستخدمة حتى اليوم.

قسم القلصادى كتابه إلى أربعة أجزاء وخاتمة، الجزء الأول فى العدد الصحيح ويشتمل على سبعة أبواب، الباب الأول فى الضرب، الباب الثانى فى الطرح، الباب الثالث فى الجمع ، الباب الرابع فى القسمة، الباب الخامس في حل الأعداد، الباب السادس في التسمية، الباب السابع في الاختبار، ويبحث الجزء الثانى من الكتاب فى الكسور ويحتوى على مقدمة وثمانية أبواب، تشتمل المقدمة على أسماء الكسور العشرة من النصف إلى الجزء، الباب الأول فى جمع الكسور، الباب الثانى فى طرح الكسور، الباب الثالث في ضرب الكسور، الباب الرابع فى قسمة الكسور، الباب الخامس في تسمية الكسور، الباب السادس فى جبر الكسور، الباب السابع فى خط الكسور، الباب الثامن فى الضرب، وهو انتقال الكسر من اسم إلى غيره. ويبحث الجزء الثالث من الكتاب فى الجذور، ويتضمن مقدمة وثمانية أبواب، تتناول المقدمة معنى كلمة جذر كعدد يضرب فى مثله، فيخرج منه المطلوب، أما الباب الأول ففى أخذ جذر العدد الصحيح المجذور، الباب الثانى فى أخذ جذر العدد غير المجذور بالتقريب، الباب الثالث فى تدقيق التقريب، الباب الرابع فى تجذير الكسور، الباب الخامس فى جمع الجذور، الباب السادس فى ضرب الجذور، الباب السابع فى قسمة الجذور وتسميتها، الباب الثامن فى ذى الأسين. أما الجزء الرابع ففى استخراج المجهول، ويتكون من ثمانية أبواب، الباب الأول فى الأعداد المتناسبة، الباب الثانى فى العمل فى الكفات، الباب الثالث في الجبر والمقابلة، الباب الرابع فى ضرب المركبات، الباب الخامس فى جمع الأجناس المختلفة والمتفقة من علم الجبر والمقابلة، الباب السادس فى الطرح، الباب السابع فى الضرب، الباب الثامن فى القسمة. وتحتوى خاتمة الكتاب على أربعة فصول، الأول فيما إذا كان فى المعادلة استثناء، الفصل الثانى فى

الجمع على نحو بيوت الشطرنج، الفصل الثالث فى موضوع المسألة المركبة وهل فيها عدد، الفصل الرابع فى استخراج العدد التام والناقص.

يعد القلصادى أول من استعمل الإشارات والرموز الجبرية المستعملة فى علم الجبر حتى الآن، فأشار إلى الجذر بحرف "جـ"، وإلى المجهول بالحرف الأول من لفظة شىء (ش) يعنى (س)، وإلى مربع المجهول بالحرف الأول من لفظة (مال) (م) يعنى س^2، وإلى مكعب المجهول بحرف (ك) يعنى س^3، وإلى علامة يساوى بالحرف "ل"، وبثلاث نقاط هكذا (∴) أشار إلى النسبة.

ودوّن القلصادى رموزه هذه فى كتابه كشف الأسرار عن علم الغبار الذى امتدت أهميته من المسلمين إلى الغرب الذى ترجمه إلى اللاتينية وأفاد بما فيه، حتى أن أحد علماءه الذى اشتهر بعلم المثلثات والهندسة والجبر، وهو فرانسوافيته (1540- 1603) قد أخذ رموز القلصادى فى مبدأ استعمال الرموز فى الغرب ونسبها لنفسه وتوسع فيها بالشكل المعروف حالياً.

ويعترف أحد مؤرخى الرياضيات الغربيين وهو فرانسيس كاجورى بأن القلصادى قد استخرج قيمة تقريبية للجذر التربيعى للكمية (أ^2 + ب) وجاءت هكذا $\frac{4أ^3 + 3أب}{4أ^2 + ب}$ وهذه القيمة التقريبية أخذها علماء الرياضيات الغربيين وخاصة ليوناردوا أف بيزا الإيطالى ومواطنه تارتاليا وغيرهما واستعملوها فى إيجاد القيم التقريبية للجذور الصم، مثل إيجاد القلصادى القيمة التقريبية للجذر التربيعى $\sqrt{5}$ لثلاثة أرقام عشرية هكذا:

$$\sqrt{5} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{2^2 + 1} \qquad أ = 2 \text{ ، } ب = 1$$

ولذلك فإن $\frac{4\text{أ}^3 + 3\text{أ}\text{ب}}{4\text{أ}^2 + \text{ب}} = \frac{4(2)^3 + 3(2)(1)}{4(2)^2 + 1}$

$$= \frac{4(8) + 6}{17} = \frac{32 + 6}{17} = \frac{38}{17} = 2\frac{4}{17}$$

$$\sqrt{5} = 2\frac{4}{17} = 2.235$$

والقيمة الحديثة لـ $\sqrt{5} = 2.2361$.

ولإيجاد الجذور لأى عدد اتبع علماء الرياضيات فى الحضارة الإسلامية قبل القلصادى هذه الطريقة:

$$\sqrt{\text{أ}^2 + \text{د}} = \text{أ} + \frac{\text{د}}{2\text{أ}}$$

وأيضاً إذا كانت د > أ : $\sqrt{\text{أ}^2 + \text{د}} = \text{أ} + \frac{\text{د}}{2\text{أ} + 1}$

ابتكر القلصادى تطويراً لهذه الطريقة بوضعه شروطاً ضابطة لها وهى:

إذا كان د < أ فإن $\sqrt{\text{أ}^2 + \text{د}} = \text{أ} + \frac{\text{د}}{2\text{أ}}$

وإذا كان د > أ فإن $\sqrt{\text{أ}^2 + \text{د}} = \text{أ} + \frac{\text{د} + \text{أ}}{2(\text{أ} + 1)}$

وبتطبيق هذه الشروط تمكن القلصادى من استخراج قيمة الجذور بطريقة أسهل وأكثر حيوية من ذى قبل، وهذا يُعد تطويراً مهماً ألحقه القلصادى بعلم الجبر.

ويمكن أن نضرب مثالاً بإيجاد القلصادى قيمة جذر $\sqrt{11}$ هكذا:

$$\sqrt{11} = \sqrt{9 + 2} = \sqrt{3^2 + 2} \leftarrow \text{أ} = 3 \text{ ، } \text{د} = 2.$$

لذلك فإن أ > د.

إذن $\sqrt{\text{أ}^2 + \text{د}} = \frac{\text{د}}{2\text{أ}} + \text{أ}$.

لذا فإن $\sqrt{11} = 3 \frac{2}{(3)\,2} = 3 \frac{1}{3} = 3.333$.

وقيمة الجذر التقريبى الحديث للعدد 11 هى 3.3166.

وأوجد القلصاوى القيمة التقريبية للعدد (13) هكذا:

$\sqrt{13} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{3^2 + 4} \leftarrow$ أ = 3 ، د = 4.

لذلك فإن د > أ.

إذن $\sqrt{\text{أ}^2 + \text{د}} = \text{أ} + \frac{1 + \text{د}}{(1 + \text{أ})\,2}$

لذا فإن $\sqrt{13} = 3 + \frac{1 + 4}{(1 + 3)\,2} = 3 + \frac{5}{8} = 3\frac{5}{8} = 3.625$.

وقيمة الجذر التقريبى الحديث للعدد 13 هى 3.606.

ومن هنا يتضح مدى إسهام آخر المؤلفين الكبار من أهل الأندلس وهو القلصادى فى تطور الرياضيات، وخاصة علم الحساب وعلم الجبر، فقد أسدى للإنسانية خدمة جليلة بتطويره علم الجبر، ذلك التطوير الذى ظل ممتداً منذ عصره وحتى العصر الحديث، وليس أدل على ذلك من أن مؤلفاته فى الحساب والجبر، وخاصة كتابه "كشف الأسرار عن علم الغبار" ظلت معيناً ينهل منه طلاب العلم فى الغرب حتى القرن العشرين.

نتائج الدراسة

سجلت فى بعض صفحات هذا الكتاب بعض الاستنتاجات والنتائج التى لم يتحتم تأجيلها، وبعد أن اشتعرضت كل جوانب الموضوع – من وجهة نظرى – علىّ الآن أن استخلص النتائج من خلال الإجابة على الإشكالية الرئيسة التى طرحتها فى مقدمته، وفى سبيل ذلك أطرح النتائج الآتية:

بيّنت الدراسة فى المدخل التمهيدى كيف بدأت رياضيات ما قبل التاريخ بدايات بديهية من خلال وجود جماعات عددية سواء فى الإنسان أو الحيوان مثل عدد الأصابع وعدد الأرجل، ثم استعان إنسان العصور القديمة بالحصى لعد الأشياء، ومنها جاءت لفظة إحصاء. وأوضحت الدراسة كيف ارتبطت الرياضيات فى الحضارة المصرية القديمة بالناحية العملية، الأمر الذى جعل المصريون يرتقون بها ويطورنها، فلقد عرفت مصر القديمة الرياضيات والحساب أكثر من سواها، وذلك لإرتباط العمليات الرياضياتية بالبناء الهندسى للمعابد والأهرام والمقابر الفرعونية الكبرى، فسجل المصريون فى تاريخ علم الرياضيات معلومات مهمة فى الحساب والهندسة والمتواليات الهندسية والحسابية، ومعادلة الدرجة الثانية تلك التى نقلها عنهم فيثاغورث اليونانى بعد زيارته لمصر، وصاغ منها نظريته المعروفة باسمه.

ووقفت الدراسة على اختراع البابليين للأحرف الهجائية وتدوينهم الأرقام والأعداد بها طبقاً للترتيب الأبجدى، ووضعهم جداول للمربعات والمكعبات. وحسب البابليون والسومريون مساحة المستطيل وشبه المنحرف والمثلث القائم، ووقفوا على تشكيل ستة مثلثات متساوية الأضلاع فى الدائرة، ومقدار كل زاوية فى كل مثلث تساوى ستين درجة. أما الساميون فقد بيّنت الدراسة كيف استعملوا الأرقام الحرفية، فدوّنوا الأرقام باستعمال حروف

الهجاء العربية بحيث يدل على كل حرف برقم معين من الآحاد وحتى مئات الألوف.

أما بلاد اليونان فقد عرفت بدورها الرياضيات وطورتها بعد أن اقتبست عن المصريين والسومريين والبابليين. ولما نقل العرب والمسلمين تراث اليونان لم تستطع الرياضيات اليونانية أن تروى ظمأهم لتعلقها بالجانب النظرى المجرد، واجتذب العرب والمسلمون الناحية العملية من الرياضيات، فلم يكتفوا باستيعاب الهندسة اليونانية، ولكنهم اهتموا أيضاً بتطبيقها عملياً، وقد نجحوا فى ذلك أيما نجاح، وهنا تكمن عبقرية المسلمين وأثرها العظيم فى تقدم العلم عامة والرياضيات خاصة، والجبر بصورة أخص، وذلك ما وقفت عليه الدراسة فى الفصل الأول من باب طبقات علماء الرياضيات فى الحضارة الإسلامية والذى بحث فى إمام الرياضيين المسلمين محمد بن موسى الخوارزمى، وبيَّن كيف بدأ تكوين الخوارزمى العلمى، ومدى أثر هذا التكوين فى نشاطه العلمى، وذلك بغرض معرفة أبعاد الإنجاز الذى تم على يد الخوارزمى باعتباره إمام علماء الرياضيات المسلمين. وكل ذلك قادنى بطبيعة الحال إلى التعرف على أبعاد إنجازات علماء المسلمين خلال عصر الخوارزمى، وذلك لكى أقف على مدى تأثر هؤلاء العلماء بالخوارزمى، والأهم مدى تأثر الغرب به، فوجدت أن تأثير الخوارزمى لم يمتد إلى علماء الرياضيات المسلمين فى العصور اللاحقة فقط، بل امتد إلى العالم الغربى، فلقد رأينا كيف اعترف أصحاب كتاب "تاريخ كمبردج للإسلام" بأن الخوارزمى هو المسئول بصورة أساسية عن تأسيس علم الجبر. وقد جاءت معرفة الغرب لكتاب الجبر والمقابلة عن طريق الترجمات اللاتينية التى وضعت له، فلقد ترجم جيرارد الكريمونى الأصل العربى لكتاب الجبر والمقابلة إلى اللغة

اللاتينية فى القرن الثانى عشر للميلاد، وترجمه أيضاً روبرت الشسترى وأصبح أساساً لدراسات كبار علماء الرياضيات الغربيين. وإلى مصنفات الخوارزمى الأخرى يرجع الفضل فى نقل الأرقام الهندية - العربية إلى الغرب حيث سميت باسمه أول الأمر algorisms (الغوريتمى)، ثم جعل الألمان من الخوارزمى اسماً يسهل عليهم نطقه، فأسموه Algorizmus ، ونظموا الأشعار باللاتينية تعليقاً على نظرياته. وما زالت القاعدة الحسابية (Algrithmus) حتى اليوم تحمل اسمه كرائد لها. وقد نشر "فردريك روزن" كتاب الجبر والمقابلة سنة 1831م فى لندن، ونشر كارنبسكى ترجمة أخرى مأخوذة من ترجمة الشسترى سنة 1915. ومن هنا اتضح أن أعمال الخوارزمى فى علم الرياضيات قد لعبت فى الماضى والحاضر دوراً مهماً فى تقدمه، لأنها أحد المصادر الرئيسة التى انتقل خلالها الجبر والأعداد العربية إلى الغرب. فعلم الجبر من أعظم ما اخترعه العقل البشرى من علوم، لما فيه من دقة وأحكام قياسية عامة. والخوارزمى هو الذى وضع قواعده الأساسية وأصوله الابتدائية كما نعرفها اليوم. ومن كل ما سبق زعمت الدراسة أن الخوارزمى صاحب مدرسة رياضياتية ممتدة، لعبت دوراً مهماً فى تطور الرياضيات منذ أن بدأ صاحبها هذا التطور، وذلك عندما انتقل من الحساب إلى الجبر، والذى اعترف العالم أجمع بأنه واضعه الحقيقى.

وبينت الدراسة كيف أن الحضارة الإنسانية لم تتوقف على الإفادة من الحضارة الإسلامية فى الرياضيات على الخوارزمى فحسب، بل اعتبر علماء الغرب ثابت بن قرة أعظم هندسى عربى على الإطلاق، وهو الذى ترجم الكتب السبعة من أجزاء المخروطات فى كتب أبولونيوس الثمانية إلى العربية فحفظ للإنسانية بذلك ثلاث كتب من مخروطات أبلونيوس فقدت أصولها

اليونانية. ورأت الدراسة أن ثابت بن قرة يُعد من أوائل علماء الحضارة الإسلامية الذين تصدوا للبرهنة على المصادرة الخامسة لإقليدس الخاصة بالخطوط المتوازية بعد أن فشل علماء اليونان فى البرهنة عليها. وما من شك فى أن هذه المصادرة تلعب دوراً مهما فى علم الهندسة، وليس أدل على ذلك من أنها شغلت تفكير علماء الرياضيات منذ القرن الثالث قبل الميلاد وحتى القرن التاسع عشر الميلادى. وقد تصدى علماء الحضارة الإسلامية للبرهنة على هذه المصادرة، وبذلوا جهوداً كبيرة فى إثباتها أدت إلى ظهور الهندسات اللاإقليديسية فى العصر الحديث، تلك التى اقترنت بأسماء غربية، مع أن علماء الحضارة الإسلامية هم الرواد الأُول لهذه الهندسات، ومنهم ثابت بن قرة.

وأوضحت الدراسة أن كتاب الارثماطيقى فى الأعداد والجبر والمقابلة يُعد أشهر كتب أبى كامل المصرى، حيث استمر هذا الكتاب فاعلاً فى التقاليد الرياضياتية عبر العصور اللاحقة، ووضعت له شروحات كثيرة. وقد وصلت إلينا فى نسختين مخطوتين، وتُرجم إلى العبرية ترجمة ناقصة، وتُرجم إلى اللغة الإنجليزية ونُشر سنة 1966 بمعرفة مارتن ليفى. ويشتمل كتاب الجبر والمقابلة لأبى كامل على معادلات الخوارزمى الست شارحاً لها، ومعللاً بعضها، وأضاف عليها معادلات كثيرة بلغت تسع وستين معادلة وربطها بالهندسة. ويُعد أبو كامل بحسب مارتن ليفى أول من حل المعادلات الجبرية التى درجتها أعلى من الدرجة الثانية، ووردت هذه الحلول لأول مرة فى تاريخ الرياضيات ضمن مصنفاته فى المضلعين الخماسى والعشارى، فضلاً عن كتاب الجبر والمقابلة. وإذا كان الخوارزمى قد أوجد الجذر الموجب لمعادلات الدرجة الثانية، فإن أبا كامل اهتم بإيجاد الجذرين الموجب والسالب،

واستطاع حل الكثير من المعادلات المحتوية على مجهولين وأكثر حتى خمسة مجاهيل .. وهكذا أوضحت الدراسة أن أبا كامل المصرى كمّل جبر الخوارزمى وأضاف عليه، ففسر مبادئه بطريقة جازمة، وعالج الجذور الصم، وأجرى العمليات الحسابية من جمع وطرح على الحدود الجبرية، وكل هذه العمليات مثلت تطويراً مهماً لعلم الجبر فى العصور اللاحقة لأبى كامل، وأثرت فيمن جاء بعده من علماء الرياضيات المسلمين كالكرخى، وعمر الخيام، وامتد التأثير إلى علماء الغرب، بل وعلماء الأرض على حد قول فلورين كاجورى فى كتابه "تاريخ الرياضيات" حيث قال: "كانت مؤلفات أبى كامل خلال القرن الثالث عشر للميلاد من المراجع الفريدة لعلماء الرياضيات فى جميع أنحاء المعمورة". وكما اعتمد العالم ليوناردوا لبيزى على مؤلفات أبى كامل، قرر هورد إيفز أن العالم الرياضياتى المشهور "فابوناسى" استند فى مؤلفاته فى علمى الحساب والجبر على مؤلفات الخوارزمى وأبى كامل المصرى.

وبيّنت الدراسة كيف عُد أبو الوفاء البوزجانى أحد الأئمة المعدودين فى الرياضيات والفلك، وألف فيهما مؤلفات مهمة أفادت منها الإنسانية، ففى الرياضيات برع أبو الوفا فى الهندسة واكتشف فيها كشوفاً لم يسبقه إليها أحد، وكذلك الجبر حيث زاد فى بحوث الخوارزمى زيادات تعد أساساً لعلاقة الهندسة بالجبر، ومنها أنه حل هندسياً معادلات من الدرجة الرابعة، وأوجد حلولاً تتعلق بالقطع المكافئ مهدت السبل لعلماء الغرب فيما بعد أن يدعوا تقدمهم بالهندسة التحليلية خطوات واسعة أدت إلى أروع ما وصل إليه العقل البشرى وهو التفاضل والتكامل. وينكشف إدعاؤهم إذا علمنا أن علم التفاضل والتكامل تم اكتشافه فى الحضارة الإسلامية أيضاً على يد ثابت بن قرة. ومع

ذلك اعترف علماء الغرب بأن أبا الوفاء هو أول من وضع النسبة المثلثية "ظل"، وأول من استعملها فى حلول المسائل الرياضياتية، وأدخل القاطع، والقاطع تمام، ودرس تربيع القطع المخروطى المكافئ بأنواعه الثلاثة: مكافئ، وناقص، وزائد، كما درس المساحة الحجمية للقطع المكافئ المجسم، وأوجد طريقة جديدة لحساب جداول الجيب التى امتازت بدقتها. ووضع البوزجانى الجداول للمماس، ووضع المعادلات التى تتعلق بجيب زاويتين، وبهذه الاكتشافات، وخاصة وضع "ظل" فى أعداد النسبة المثلثية أصبح البوزجانى فى نظر علماء الغرب من الخالدين، حيث أسس بذلك ووضع أحد الأركان التى قام عليها علم حساب المثلثات الحديث.

وأثناء البحث فى أبى سهل الكوهى، كشفت الدراسة عن وضعه عدداً من المؤلفات الهندسية المهمة ضمنها انجازاته الهندسية وفى مقدمتها اهتمامه بمسائل أرشميدس وأبولونيوس التى تؤدى إلى معادلات ذات درجة عالية من معادلات الدرجة الثانية، فالفروض التى لم يستطع أرشميدس إثباتها قد تمكن الكوهى من استخراج حلها ببراعة فائقة، وقد شكل هذا الحل أهمية فى تاريخ الهندسة، وعُدّ من أحسن ما كُتب عن الهندسة عند المسلمين. وإذا كان ثابت بن قرة قد ابتدع علم التفاضل والتكامل بإيجاده حجم الجسم المتولد من دوران القطع المكافئ حول محوره، فإن الكوهى قد طوّر مسيرة هذا العلم بإيضاحه كيفية إنشاء قطعة كروية تكافئ قطعة كروية أخرى معلومة، وتساوى مساحة سطحها الجانبى مساحة السطح الجانبى لقطعة كروية ثابتة معلومة.

أما الكرخى فقد بينت الدراسة كيف شرع فى حسبنة الجبر بمحاولة استغناء العمليات الجبرية عن التمثيل الهندسى. وقد استطاع الكرخى بالفعل أن

يحقق تلك الخصوصية الجبرية وجاءت نظريته التى وقف عليها فبكـه أحـد علماء الرياضيات الغربيين المشهورين، وانتهى بعد دراسته لكتاب الكرخـى الكافى فى الحساب مقرراً أنها النظرية الأكثر اكتمالاً، أو بالأصـح النظريـة الوحيدة فى الحساب الجبرى عند المسلمين التى نعرفها حتى اليوم. وأوضحت الدراسة كيف وضع الكرخى تطويراً فريداً لقانون حل معادلات الدرجة الثانية لم يسبقه إليه أحد، وأصبح قانوناً رئيساً فى علم الجبر. كذلك طوّر الكرخـى القانون الخاص بإيجاد الجذر التقريبى للأعداد التى ليس جذر، وابتكر صـيغة جديدة تخرج الجذر التقريبى لما لا يمكن إخراجه من الأعـداد، كمـا ابتكـر طريقة معالجة مختلف المتواليات، وعُدّ أول من عالج وبرهن على المتواليـة التى سماها "الإندراجية". وعن طريق حله لمعادلة عددين مجموع مكعبيهمـا يساوى مربع العدد الثالث، استنتج الكرخى المعادلة التى لا يخلو منها كتـاب فى الجبر، وهى: أ س^{ن} + ب ص^{ن} = م ع$^{ن-1}$. وابتكر قانوناً يـسمح بجمـع وطرح الأعداد لاصم، وهى الأعداد التى ليس لها جذر وهو:

$$\sqrt{\text{أ}} + \sqrt{\text{ب}} = \sqrt{(\text{أ} + \text{ب}) + 2\sqrt{\text{أ ب}}}$$

وأثبتت الدراسة أن المثلث المشهور الذى ادعاه بسكال الفرنـسى (ت 1662) لنفسه هو مثلث الكرخى الذى دشنه ضمن أهم مبتكراته الرياضـياتية وهى اكتشافه نظرية ذات الأسين أو ذات الحدين لأسس صـحيحة موجبـة، وترتيبه معاملات مفكوك (س + 1)^{ن}، فجاء مثلثـه لمعـاملات نظريـة ذات الحدين. وظل الغرب يستفيد من جبر وحساب الكرخى حتى القـرن التاسـع عشر، حيث ترجم هوسهيلم كتاب الكرخى "الكافى فى الحـساب" إلـى اللغـة الألمانية، وبه أصبحت أوربا، على حد قول جورج سارتون، مدينة للكرخـى الذى قدم للرياضيات أعم وأكمل نظرية فى علم الجبر عرفتها، وبقيت حتـى

القرن التاسع عشر الميلادى تستعمل مؤلفاته فى علمى الحساب والجبر، وعُدّ الكرخى، بحسب هورد إيفز، من بين العلماء الرياضيين المبتكرين لما فى كتابه الفخرى من نظريات جبرية جديدة تدل على عمق وأصالة فى التفكير، وهو أحسن كتاب فى علم الجبر فى العصور الإسلامية (الوسطى) مستنداً على كتاب محمد بن موسى الخوارزمى "الجبر والمقابلة"، وامتاز كتاب الفخرى بطابعه الأصيل فى علم الجبر لما فيه من الابتكارات الجديدة والمسائل التى لا يزال لها دور فى الرياضيات الحديثة.

ورأت الدراسة فى عمر الخيام كيف اطلع على أعمال الخوارزمى وتناولها بالدرس جاعلاً من نفسه منافساً للخوارزمى يحاول أن يصل إلى أشياء جديدة لم يصل إليها، وبالفعل وضع الخيام كتابه "فى الجبر" الذى فاق كتاب الخوارزمى فى نظر البعض. فقد ركز الخيام جُل اهتمامه على حل جميع أنواع معادلات الدرجة الثالثة وهى المسألة التى لم يتوصل أسلافه إلى حل لها عن طريق الجذور، فحلها الخيام بالطريق الهندسية. وقد أثبتت الدراسة أن طريقة حل معادلات الدرجة الثالثة التى أبدعها الخيام، أخذها رينيه ديكارت الفرنسى (ت 1650) بنصها الحرفى وضمنها كتابه "الجومطرى" بدون أن يشير إلى صاحبها الأصلى عمر الخيام. كما أثبتت الدراسة أن سيمون الهولندى (ت 1620) قد ادعى لنفسه فكرة "التصنيف" الذى أبدعها عمر الخيام الذى يُعد باعتراف جورج سارتون، أول من أبدع فكرة التصنيف، فعُد بذلك أول من مهد الطريق أمام تدشين "الهندسة التحليلية"، إذ قام بتصنيف المعادلات بحسب درجتها، وبحسب الحدود التى فيها محصورة فى أربعة عشر نوعاً، وبرهن هندسياً على حل معادلة منها باستخدام القطوع المخروطية الثلاث: الدائرة، والقطع المكافئ، والقطع الزائد. وأثبتت الدراسة كيف انتحل أحد علماء

الرياضيات الغربيين وهو ياكيرى (ت 1733) فروض عمر الخيام الثلاثة وضمّنها فى نظريته عن الخطوط المستقيمة ونسبها له مؤرخو الرياضيات الغربيون، إلا أن مؤلفات الخيام تثبت بما لا يدع مجالاً للشك أنه أول من أبدعها واستعملها فى تاريخ الرياضيات، وذلك حينما برهن على المصادرة الخامسة لإقليدس ذلك البرهان الذى ساهم فى تطور الهندسة الحديثة، فقد افترض الخيام فروضاً ثلاثة للبرهنة على أنه إذا كانت زاويتان فى مستطيل متساوى الأضلاع تساوى كل منهما زاوية قائمة، فإن الزاويتين الأخرتين تساوى كل منهما زاوية قائمة، ويستحيل أن تكون حادة أو منفرجة، وانتهى إلى أنه لا يبقى إلا أن يكونا زاويتين قائمتين، فعُدّ الخيام أول من استعمل هذه الفروض الثلاثة (الزاويتان حادتان – منفرجتان – قائمتان)، ومما لاشك فيه أن هذه الفروض تلعب دوراً مهما فى الهندسات اللاإقليديسية الحديثة.

وأوضحت الدراسة أن الفضل يرجع لنصير الدين الطوسى فى ابتكار وتعريف الأعداد الصم، وهى الأعداد التي ليس جذر، والتى لا تزال تشغل أهميتها فى الرياضيات الحديثة. كما أثبتت الدراسة أن الطوسى يُعد أول من فصل علم حساب المثلثات عن علم الفلك ووضع أول كتاب فى حساب المثلثات سنة 648هـ/ 1250م وهو كتاب "أشكال القطاعات" الذى دوّن فيه أول تطوير لنظرية جيب الزاوية إلى ما هى عليه الآن، وذلك باستعماله لمثلث المستوى. وأثبتت الدراسة أن بعض الغربيين انتحل كثيراً من نظريات كتاب الطوسى ونسبها لنفسه، فالناظر فى كتاب ريجيومونتانوس "علم حساب المثلثات" يدرك لأول وهلة أن كثيراً من نظرياته وأفكاره موجودة بنصها فى كتاب نصير الدين الطوسى "أشكال القطاعات" الذى عُدّ أول كتاب من نوعه على مستوى العالم يفصل علم المثلثات عن علم الفلك، واعتُمد مرجعاً رئيساً

لكل علماء الغرب الباحثين فى علم المثلثات الكروية والمستوية، وذلك بعد ترجمته إلى اللاتينية والإنجليزية والفرنسية، فدرسوه وأفادو به إلى الدرجة التى معها نسب ريجيومونتانوس كثيراً من نظرياته لنفسه كما ذكرت. وبيّنت الدراسة كيف أظهر الطوسى براعة فائقة وخارقة للعادة، بحسب جورج سارتون، فى معالجة قضية المتوازيات فى الهندسة حيث ألم بأسس الهندسة المستوية المتعلقة بالمتوازيات، وبرهن كثيراً من مسائلها، تلك البراهين التى شكلت نظرية أساس عمل الاسطرلاب، ولأول مرة فى تاريخ الرياضيات استطاع الطوسى من دراسة المثلث الكروى قائم الزاوية، وأوجد منه متطابقات مثلثية. وانتهت الدراسة فى الطوسى إلى أن أهم ما قدمه للإنسانية جمعاء وضعه للهندسة اللاإقليديسية الحديثة التى تلعب دوراً مهماً حالياً فى تفسيرات النظرية النسبية ودراسة الفضاء، وإذا كانت الهندسة اللاإقليديسية الحديثة قد اقترنت حديثاً بأسماء غربية مثل فاوس وريمان الألمانيين، وبولياى المجرى ، ولوباتشوفسكى الروسى، فإن الدراسة قد أتت بشهادات غربية أيضاً تُرجع الفضل لأهله وتعترف بوضع نصير الدين الطوسى للهندسة اللاإقليديسية الحديثة، فقد برهن الطوسى بكل جدارة، على حد قول درك ستريك، على المصادرة الخامسة من مصادرات إقليدس، وتوصل وبرهن على أن مجموع زوايا المثلث تساوى قائمتين، وذلك يكافئ المصادرة الخامسة من مصادرات إقليدس، وبذلك يكون الطوسى قد وضع أساس الهندسة اللاإقليديسية الحديثة. ويذكر هورد إيفز أن جرولاسكير الإيطالى المسمى بأبى الهندسة اللاإقليديسية قد اعتمد بصورة أساسية على عمل نصير الدين الطوسى فى هذا الميدان من الهندسة. ويدرس جان والس الرياضياتى الإنجليزى الشهير برهان نصير الدين الطوسى على المصادرة الخامسة لإقليدس، ويخرج من دراسته معترفاً

بفضل نصير الدين الطوسى فى وضع الهندسة اللاإقليديسية وظهور فجر الرياضيات الحديثة.

وذهبت الدراسة إلى أن أهمية العالم إنما تقاس بما قدمه من تطوير لعلمه الذى يبحث فيه، وبيّنت كيف قدم ابن البنّاء المراكشى من الأفكار والنظريات الرياضياتية المبتكرة ما أدت إلى تطور وتقدم علم الرياضيات فى الحضارة الإسلامية، وفى العصور اللاحقة، وقد دل على ذلك أن كتاب تلخيص أعمال الحساب لإبن البنّاء نال اهتمام علماء الرياضيات فى العصور اللاحقة له، فدرسوه ولخصوه، وشرحوه شروحات متعددة، ظل بعضها، وهو شرح القلصادى الكبير من المراجع الرياضياتية الرئيسة على الجانبين العربى والغربى، وبيّنت الدراسة كيف ادعى بعض الغربيين كثيراً من نظريات ابن البناء ونسبوها لأنفسهم زوراً وبهتاناً، ولكن الدراسة وقفت فى الوقت نفسه على شهادات غربية معترفة بهذا الزور وذاك البهتان وتُرجع الفضل لأهله، ففى النصف الأخير من القرن التاسع عشر الميلادى ترجم أريستيدمار كتاب تلخيص أعمال الحساب لابن البناء إلى اللغة الفرنسية، وبعد أن درسه دراسة وافية، قرر أن كثيراً من النظريات الرياضياتية المنسوبة لعلماء غربيين هى نظريات ابن البنّاء المراكشى. وهذا ما حدا بديفيد سميث أن يذكر أن كتاب تلخيص أعمال الحساب لابن البنّاء يشتمل على بحوث كثيرة فى الكسور ونظريات لجمع مربعات الأعداد ومكعباتها وقانون الخطأين لحل المعادلة من الدرجة الأولى. وقدم ابن البنّاء، بحسب فرانسيس كاجورى، خدمة عظيمة بإيجاده الطرق الرياضياتية البحتة وإيجاده القيم التقريبية لجذور الأعداد الصم، ولذا رأى جورج سارتون أن كتاب تلخيص أعمال الحساب لابن البنّاء المراكشى يحتوى على نظريات حسابية وجبرية مفيدة، إذ أوضح العويص

منها إيضاحاً لم يسبقه إليه أحد، لذا يُعد كتابه من أحسن الكتب التى ظهرت فى علم الحساب.

وإذا كان الخلاف بين علماء الرياضيات كبير، على حد قول ديفيد سميث، فإن غالبيتهم يتفق على أن غياس الدين الكاشى هو الذى ابتكر الكسر العشرى، ويعترف سميث بأن المسلمين فى عصر الكاشى سبقوا الأوربيين فى استعمال النظام العشرى، وأنهم كانوا على معرفة تامة بالكسور العشرية، ولا يخفى ما لهذا الابتكار من أثر بالغ فى اختراع الآلات الحاسبة.

وأوضحت الدراسة كيف بحث الكاشى كيفية تعيين نسبة محيط الداشرة إلى قطرها، وأوجد الكاشى تلك النسبة، على حد قول سميث، إلى درجة من التقريب لم يسبقه إليها أحد، وتكاد تعادل النسبة التى استخرجها علماء القرن العشرين بالآلات الحاسبة، فوصلت نسبة الكاشى إلى 16 خانة عشرية، وقيمتها 3.1415926535898732.

وبينت الدراسة كيف توصل الكاشى إلى قانون خاص بمجموع الأعداد الطبيعية أو المتسلسلة العددية المرفوعة إلى القوة الرابعة، وهو قانون لا يمكن التوصل إليه بقليل من النبوغ على رأى كرادى فو. فقد توصل علماء الحضارة الإسلامية قبل الكاشى إلى قوانين عدة فى مجموع الأعداد الطبيعية المرفوعة إلى القوة الأولى والثانية والثالثة، وزاد الكاشى بوضع قانون مجموع الأعداد الطبيعية المرفوعة إلى القوة الرابعة. ومما لاشك فيه أن هذا القانون أدى إلى تطور علم الأعداد تطوراً ممتداً منذ الكاشى وحتى العصر الحديث، خاصة وأن الكاشى استطاع إيجاد خوارزمية لحساب الجذور النونية لأى عدد والتى عُدت حالة خاصة للطرق التى اكتشفت بعد ذلك بقرون فى العصر

الحديث بمعرفة "هورنر". وأوضحت الدراسة أنه إذا كان بعض مؤرخى الرياضيات الغربيين ينسبون نظرية "ذات الحدين" لإسحاق نيوتن أو لغيره من الغربيين، فإن منهم من يعترف بأن صاحبها هو غياث الدين الكاشى، ففى كتابه مصادر الرياضيات يقرر دريك ستروِيك أن الكاشى هو أول من فكر فى طريقة ذات الحدين – بعد أن وضع أساسها الكرخى وعمر الخيام–، ويرجع له الفضل فى تطوير خواص معاملاتها، فاستخدم لإيجاد حدود المعادلة الجبرية قاعدة عمر الخيام وطورها وجعلها قاعدة عامة لنظرية ذات الحدين لأى أس صحيح. ولا يغبن عن البال ما لنظرية ذات الحدين من أهمية فى الرياضيات حتى الآن.

ولا تقل أهمية نظرية ذات الحدين عن أهمية الرموز الجبرية، تلك التى أثبتت الدراسة وبيّنت أن أبا الحسن القلصادى هو أول من دشن واستعمل الإشارات والرموز الجبرية المستعملة فى الجبر حتى الآن. ودوّن القلصادى رموزه هذه فى كتابه "كشف الأسرار عن علم الغبار" الذى امتدت أهميته من المسلمين إلى الغرب الذى ترجمه إلى اللاتينية وأفاد بما فيه، وبيّنت الدراسة أن هذا الكتاب يثبت بما لا يدع مجالاً للشك أن أحد الرياضين الغربيين وهو فرانسوا فيته (ت 1603) الذى اشتهر بعلم المثلثات والهندسة والجبر، قد أخذ رموز القلصادى فى مبدأ استعمال الرموز فى الغرب ونسبها لنفسه. وأوضحت الدراسة أيضاً أن كتاب "كشف الأسرار عن علم الغبار" يثبت وباعتراف أحد مؤرخى الرياضيات الغربيين وهو فرانسيس كاجورى أن القلصادى قد استخرج قيمة تقريبية للجذر التربيعى للكمية ($أ^2$ +ب)، وهذه القيمة التقريبية أخذها علماء الرياضيات الغربيين وخاصة ليوناردو أف بيزا الإيطالى ومواطنه تارتاليا وغيرهما واستعملوها فى إيجاد القيم التقريبية

للجذور الصم. وانتهت الدراسة فى القلصادى باعتباره آخر المؤلفين الكبار فى الأندلس بإيضاح اسهامه فى تطور الرياضيات، وخاصة علم الحساب وعلم الجبر، فقد أسدى للإنسانية خدمة جليلة بتطويره علم الجبر، ذلك التطوير الذى ظل ممتداً منذ عصره وحتى العصر الحديث، وليس أدل على ذلك من أن مؤلفاته فى الحساب والجبر، وخاصة كتابه "كشف الأسرار عن علم الغبار" ظلت معيناً ينهل منه طلاب العلم فى الغرب حتى القرن العشرين.

يتضح من كل ما سبق أن العمل العلمى الذى قُدم فى هذا الكتاب يدل بصورة قوية على مدى إسهام علماء الرياضيات المسلمين فى تأسيس علوم الرياضيات الحديثة. وحاول الكتاب عبر صفحاته أن يُرجع إلى علماء الرياضيات المسلمين كثيراً من اكتشافاتهم وابتكاراتهم الرياضياتية التى أخذها بعض علماء الغرب ونسبوها إلى أنفسهم، الأمر الذى يجعلنا نقف بصورة ما على حجم الإسهام الرياضياتى الإسلامى فى الحضارة الإنسانية، ذلك الحجم الذى يحتوى على أسس الرياضيات الحديثة فى الحضارة الإسلامية.

وتلك هى النتيجة النهائية التى تنتهى إليها هذه الدراسة.

والله أعلى وأعلم .

أهم المصادر والمراجع

ابن البنّاء المراكشى : تلخيص أعمال الحساب، مخطوط مكتبة المخطوطات التونسية رقم 307ر.

.... : رسالة فى الأعداد التامة والزائدة والناقصة والمتحابة، تحقيق محمد سويسى، مجلة الجامعة التونسية، العدد 13، 1976.

ابن النديم : الفهرست، طبعة القاهرة القديمة، 1984.

أبو الوفاء البوزجانى : فيما يحتاج إليه الصناع من أعمال الهندسة، مخطوط مكتبة أياصوفيا رقم 8753، ومكتبة الأمبروزيانا، كتالوج 44، رقم 68.

دكتور أحمد فؤاد باشا : التراث العلمى للحضارة الإسلامية ومكانته فى تاريخ العلم والحضارة، دار المعارف، القاهرة 1993.

ثابت بن قرة : رسالة فى برهان المصادرة المشهورة من إقليدس، تحقيق خليل جاويش، ضمن كتابه نظرية المتوازيات فى الهندسة الإسلامية، المؤسسة الوطنية للترجمة والتحقيق والدراسات، تونس 1988.

دكتور خالد حربى علوم حضارة الإسلام ودورها فى الحضارة الإنسانية، سلسلة كتاب الأمة، قطر 2004.

الخوارزمى، أبو عبد محمد بن موسى : كتاب الجبر والمقابلة، تحقيق على مصطفى مشرفة، ومحمد مرسى أحمد، ملحق بكتاب

ماهر عبد القادر: التراث والحضارة الإسلامية، دار المعرفة الجامعية، الإسكندرية، 1997.

دكتور رشدى راشد : تاريخ الرياضيات العربية، مركز دراسات الوحدة العربية، بيروت 1989.

دكتور رشدى راشد، وبيجان وهاب زاده : رياضيات عمر الخيام، ترجمة نقولا فارس، مركز دراسات الوحدة العربية، بيروت 2005.

زيجريد هونكه : شمس العرب تسطع على الغرب، ترجمة فاروق بيضون، كمال دسوقى، مراجعة فاروق عيسى الخورى، المكتب التجارى للطباعة والنشر، بيروت 1969.

دكتور عبد الحميد صبره : برهان نصير الدين الطوسى على مصادرة إقليدس الخامسة، مجلة كلية الآداب، جامعة الإسكندرية، المجلد الثالث عشر، طبعة جامعة الإسكندرية، 1959.

عمر الخيام النيسابورى : رسالة فى شرح ما أشكل من مصادرات كتاب إقليدس، تحقيق عبد الحميد صبره، منشأة المعارف، الإسكندرية 1961.

القفطى : إخبار العلماء بأخبار الحكماء، طبعة القاهرة 1326هـ.

كارادى فو الفلك والرياضيات، بحث ضمن كتاب تراث الإسلام، تأليف جمهرة من المستشرقين، تعريب وتعليق جرجيس فتح الله، بيروت 1972.

الكرخى، أبو بكر محمد بن الحاسب	:	الكافى فى الحساب، مخطوط مكتبـة كـوبريلى باستانبول رقم 950.
دكتور ماهر عبد القادر محمد	:	التراث والحـضارة الإسـلامية، دار المعرفـة الجامعية، الإسكندرية، 1997.
محمد عاطف البرقوقى، وآخرون	:	الخوارزمى العالم الرياضـى الفلكـى، الـدار القومية للطباعة والنشر (د. ت).

Christopher, J. B; The Islamic, Harper & Row, Publishers, New York, 1972.

Holt, P. M & Ann, K.S.L and Lewis; The Cambride History of Islamic Society and Civilization, Cambridge University, Press 1970.

فهرست الكتاب

أعمال الدكتور خالد حربى

1- برء ساعة : للرازى (دراسة وتحقيق)، دار ملتقى الفكر، الإسكندرية 1999، الطبعة الثانية، دار الوفاء2005 .

2- نشأة الإسكندرية وتواصل نهضتها العلمية. : الطبعة الأولى، دار ملتقى الفكر، الإسكندرية 1999.

3- أبو بكر الرازى حجة الطب فى العالم : الطبعة الأولى، دار ملتقى الفكر، الإسكندرية 1999، الطبعة الثانية، دار الوفاء، الإسكندرية 2006.

4- خلاصة التداوى بالغذاء والأعشاب : الطبعة الأولى ، دار ملتقى الفكر الإسكندرية 1999- الطبعة الثانية 2000، توزيع مؤسسة أخبار اليوم ، الطبعة الثالثة دار الوفاء ، الإسكندرية 2006 .

5- الأسس الابستمولوجية لتاريخ الطب العربي : دار الثقافة العلمية،الإسكندرية 2001 ، الطبعة الثانية ، دار الوفاء ، الإسكندرية 2005.

6- الرازى فى حضارة العرب : (ترجمة وتقديم وتعليق)، دار الثقافة العلمية، الإسكندرية 2002.

7- سر صناعة الطب : للرازى (دراسة وتحقيق)، دار الثقافة العلمية الإسكندرية 2002 ، الطبعة الثانية، دار الوفاء، الإسكندرية 2005.

8- كتاب التجارب : للرازى (دراسة وتحقيق)، دار الثقافة العلمية، الإسكندرية 2002 ، الطبعة الثانية دار الوفاء الإسكندرية 2005.

9- جراب المجربات وخزانة الأطباء : للرازى (دراسة وتحقيق وتنقيح)، دار الثقافة العلمية، الإسكندرية 2000، الطبعة الثانية دار الوفاء الإسكندرية 2005.

10- المدارس الفلسفية فى الفكر الإسلامى(1) "الكندى والفارابي" : الطبعة الأولى منشأة المعارف، الإسكندرية 2003 . الطبعة الثانية ، المكتب الجامعى الحديث ، الإسكندرية 2009.

11- دراسات فى الفكر العلمى المعاصر (1) علم المنطق الرياضى : الطبعة الأولى ، دار الوفاء ، الإسكندرية 2003 .

12- دراسات فى الفكر العلمى المعاصر (2) الغائية والحتمية وأثرهما فى الفعل الإنسانى : الطبعة الأولى ، دار الوفاء ، الإسكندرية 2003 .

13- دراسات فى الفكر العلمى المعاصر (3) إنسان العصر بين البيولوجيا والهندسة الوراثية. : الطبعة الأولى ، دار الوفاء ، الإسكندرية 2003 .

14- الأخلاق بين الفكرين الإسلامى والغربى :الطبعة الأولى منشأة المعارف، الإسكندرية 2003. الطبعة الثانية ، المكتب الجامعى الحديث ، الإسكندرية 2009.

15- العولمة بين الفكرين الإسلامى والغربى "دراسة مقارنة" : الطبعة الأولى ، منشأة المعارف ، الإسكندرية 2003 ، الطبعة الثانية دار الوفاء ، الإسكندرية 2007 ، الطبعة الثالثة ، المكتب الجامعى الحديث ، الإسكندرية 2010 .

16- العولمة وأبعادها . : مشاركة فى كتاب "رسالة المسلم المعاصر فى حقبة العولمة" ، الصادر عن وزارة الأوقاف والشئون الإسلامية بدولة قطر - مركز البحوث والدراسات ، رمضان 1424 ، أكتوبر - نوفمبر 2003.

17- الفكر الفلسفى اليونانى وأثره فى اللاحقين : الطبعة الأولى ، دار الوفاء ، الإسكندرية 2003 ، الطبعة الثانية ، المكتب الجامعى الحديث ، الإسكندرية 2009.

18- ملامح الفكر السياسى فى الإسلام : الطبعة الأولى دار الوفاء ، الإسكندرية 2003 ، الطبعة الثانية ، المكتب الجامعى الحديث ، الإسكندرية 2009.

19- The Role of Orientalization in the West's Attitude to Islam and its civilization, Dar Al - Sakafa Al - Alamia, Alexandria 2003.

20- شهيد الخوف الإلهى ، الحسن البصري : الطبعة الأولى دار الوفاء، الإسكندرية 2003 ، الطبعة الثانية ، دار الوفاء ، الإسكندرية 2006 .

21- دراسات فى التصوف الإسلامى : الطبعة الأولى دار الوفاء ، الإسكندرية 2003.

22- بنية الجماعات العلمية العربية الإسلامية : الطبعة الأولى دار الوفاء، الإسكندرية 2004 ، الطبعة الثانية ، دار الوفاء ، الإسكندرية 2010.

23- نماذج لعلوم الحضارة الإسلامية وأثرها فى الآخر : الطبعة الأولى ، دار الوفاء ، الإسكندرية 2005 .

24- مقالة فى النقرس للرازى (دارسة وتحقيق). : الطبعة الأولى، دار الوفاء، الإسكندرية 2005، الطبعة الثانية ، المكتب الجامعى الحديث ، الإسكندرية 2009.

25- التراث المخطوط: رؤية فى التبصير والفهم(1) علوم الدين لحجة الإسلام أبى حامد الغزالى. : الطبعة الأولى، دار الوفاء، الإسكندرية 2005.

26- التراث المخطوط: رؤية فى التبصير والفهم (2) المنطق. : الطبعة الأولى، دار الوفاء، الإسكندرية 2005.

27- علوم حضارة الإسلام ودورها فى الحضارة الإنسانية : الطبعة الأولى ، سلسلة كتاب الأمة ، قطر 2005.

28- علم الحوار العربى الإسلامى "آدابه وأصوله". الطبعة الأولى ، دار الوفاء ، الإسكندرية 2006.

29- المسلمون والآخر حوار وتفاهم وتبادل حضارى . : الطبعة الأولى ، دار الوفاء ، الإسكندرية 2006. الطبعة الثانية ، المكتب الجامعى الحديث، الإسكندرية 2009.

30- الأسر العلمية ظاهرة فريدة فى الحضارة الإسلامية . : الطبعة الأولى ، دار الوفاء، الإسكندرية 2006، الطبعة الثانية ، المكتب الجامعى الحديث ، الإسكندرية 2009.

31- العبث بتراث الأمة فصول متوالية (1) . : الطبعة الأولى ، الإسكندرية 2006.

32- العبث بتراث الأمة (2) مائية الأثر الذى فى وجه القمر للحسن بن الهيثم فى الدراسات المعاصرة . : الطبعة الأولى ، الإسكندرية 2006.

33- منهاج العابدين لحجة الإسلام الإمام أبى حامد الغزالى (دراسة وتحقيق) : الطبعة الأولى، دار الوفاء، الإسكندرية 2007 ، الطبعة الثانية ، المكتب الجامعى الحديث، الإسكندرية 2010.

34- ابداع الطب النفسى العربى الإسلامى ، دراسة مقارنة بالعلم الحديث . :الطبعة الأولى ، المنظمة الإسلامية للعلوم الطبية ، الكويت 2007.

35- مخطوطات الطب والصيدلة بين الإسكندرية والكويت : الطبعة الأولى ، دار الوفاء ، الإسكندرية 2007.

36- مقدمة فى علم "الحوار" الإسلامى : الطبعة الأولى ، المكتب الجامعى الحديث ، الإسكندرية 2009.

37- تاريخ كيمبردج للإسلام ، العلم (ترجمه وتقديم وتعليق) الطبعة الأولى، المكتب الجامعى الحديث ، الإسكندرية 2009.

38- علوم الحضارة الإسلامية ودورها فى الحضارة الإنسانية : الطبعة الأولى ، المكتب الجامعى الحديث ، الإسكندرية 2009.

39- دور الحضارة الإسلامية فى حفظ تراث الحضارة اليونانية (1) أبقراط "إعادة اكتشف لمؤلفات مفقودة". : الطبعة الأولى ، المكتب الجامعى الحديث ، الإسكندرية 2009.

40- دور الحضارة الإسلامية فى حفظ تراث الحضارة اليونانية (2) جالينوس "إعادة اكتشف لمؤلفات مفقودة". : الطبعة الأولى ، المكتب الجامعى الحديث ، الإسكندرية 2009.

41- مدارس علم الكلام فى الفكر الإسلامى المعتزلة والأشاعرة : الطبعة الأولى ، المكتب الجامعى الحديث ، الإسكندرية 2009.

42- The Impact of sciences of Islamic Civilization on Human Civilization, Dar Al - MaKTAB Al- Gamaay Al- Hadis, Alexandria 2010.

43- أعلام الطب فى الحضارة الإسلامية (1) تياذوق، إعادة اكتشاف لنصوص مجهولة ومفقودة : الطبعة الأولى، دار الوفاء الإسكندرية 2010.

44-أعلام الطب فى الحضارة الإسلامية (2) ماسرجويه البصرى، إعادة اكتشاف لنصوص مجهولة ومفقودة :الطبعة الأولى، دار الوفاء، الإسكندرية 2010.

45-أعلام الطب فى الحضارة الإسلامية (3) عيسى بن حكم، إعادة اكتشاف لنصوص مجهولة ومفقودة : الطبعة الأولى، دار الوفاء، الإسكندرية 2010.

46-أعلام الطب فى الحضارة الإسلامية (4) عبدوس، إعادة اكتشاف لنصوص مجهولة ومفقودة :الطبعة الأولى، دار الوفاء، الإسكندرية 2010.

47-أعلام الطب فى الحضارة الإسلامية (5) الساهر، إعادة اكتشاف لنصوص مجهولة ومفقودة :الطبعة الأولى، دار الوفاء، الإسكندرية 2010.

48-أعلام الطب فى الحضارة الإسلامية (6) آل بختيشوع، إعادة اكتشاف لنصوص مجهولة ومفقودة :الطبعة الأولى، دار الوفاء، الإسكندرية 2010.

49-أعلام الطب فى الحضارة الإسلامية (7) الطبرى، إعادة اكتشاف لنصوص مجهولة ومفقودة : الطبعة الأولى ، دار الوفاء ، الإسكندرية 2010.

50-أعلام الطب فى الحضارة الإسلامية (8) يحيى بن ماسويه، إعادة اكتشاف لنصوص مجهولة ومفقودة :الطبعة الأولى، دار الوفاء، الإسكندرية 2010.

51-أعلام الطب فى الحضارة الإسلامية (9) حنين بن اسحق، إعادة اكتشاف لنصوص مجهولة ومفقودة :الطبعة الأولى، دار الوفاء، الإسكندرية 2010.

52-أعلام الطب فى الحضارة الإسلامية (10) اسحق بن حنين، إعادة اكتشاف لنصوص مجهولة ومفقودة :الطبعة الأولى، دار الوفاء، الإسكندرية 2010.

53- طب العيون فى الحضارة الإسلامية "أسس واكتشافات" :الطبعة الأولى المكتب الجامعى الحديث ، الإسكندرية 2010.

54-علم الحوار الإسلامى : كتاب المجلة العربية العدد412 المملكة العربية السعودية ابريل2011

55-الطب النفسى فى الحضارة الإسلامية "تنظير وتأسيس وإبداع" : الطبعة الأولى المكتب الجامعى الحديث ، الإسكندرية2011.

56- دور الحضارة الإسلامية فى حفظ تراث الحضارة اليونانية (4) روفس الأفسسى، إعادة اكتشاف لمؤلفات مفقودة الطبعة الأولى ، المكتب الجامعى الحديث ، الإسكندرية 2011.

57- دور الحضارة الإسلامية فى حفظ تراث الحضارة اليونانية (5) ديسقوريدس، إعادة اكتشاف لمؤلفات مفقودة. : الطبعة الأولى ، المكتب الجامعى الحديث ، الإسكندرية 2011.

58- الجوانية، دراسة فى فكر عثمان أمين : الطبعة الأولى ، المكتب الجامعى الحديث ، الإسكندرية 2012.

59- طب الباطنة فى الحضارة الإسلامية "تأسيس وتأصيل" : الطبعة الأولى ، الالطبعة الاولى،المكتب الجامعى الحديث، الإسكندرية 2012.

60- أسس النهضة العلمية فى الإسلام الطبعة الأولى،دار الوفاء، الاسكندرية2012.

61-مبادئ النظام السياسى فى الاسلام "تأصيل وتفكير" الطبعة الاولى، المكتب الجامعى الحديث، الاسكندرية2012.

62- طب الأسنان فى الحضارة الإسلامية إبداع ممتد إلى العلم الحديث الطبعة الاولى,المكتب الجامعى الحديث,الاسكندرية2012.

63- طب الأنف والأذن والحنجرة فى الحضارة الاسلامية الطبعة الاولى,المكتب الجامعى الحديث,الاسكندرية2012.

64- فرق العمل العلمية فى الحضارة الإسلامية الطبعة الأولى، كتاب المجلة العربية، العدد 189، المملكة العربية السعودية 2012.

65- أسس الرياضيات الحديثة فى الحضارة الاسلامية الطبعة الاولى, المكتب الجامعى الحديث, الاسكندرية 2012.